X-ENS

Exercice 1 X
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, continues et croissantes sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + f(u-v) = \lambda v + g(v-u)$.
2. Montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda u + f(u-v) = \lambda v + g(v-u) = 0$.
3. Combien y a-t-il de solutions à la question 2. ?
4. On suppose que $\lambda = 0$. Refaire la question 3., en discutant suivant f et g.

Indication 1

Solution 1

1. Posons $\tilde{g} : t \mapsto g(-t)$. $\tilde{g}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Posons ensuite $h = \lambda \mathrm{Id} + f - \tilde{g}$. h est alors continue et croissante sur $\mathbb{R}$ et même strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque $\lambda\mathrm{Id}$ l'est et que $f - \tilde{g}$ est croissante.
On cherche $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h(u-v) = 0$.
Or $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$: en effet, $\lambda t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ et $f - \tilde{g}$ étant croissante, converge vers une limite finie ou diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, mais dans les deux cas, la somme $\lambda\mathrm{Id} + f - \tilde{g}$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$. De même h diverge vers $-\infty$ en $-\infty$.
Comme h est continue, strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et donc il existe un unique t_0 tel que $h(t_0) = 0$.
L'ensemble des solutions est alors
$$\{(t_0 + v, v) \mid v \in \mathbb{R}\}.$$
2. On reprend les notations de la question précédente. $t \mapsto \lambda t + \tilde{g}(t_0)$ est affine, strictement croissante et donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: il existe un unique $v_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda v_0 + g(-t_0) = 0$. Avec la question précédente, si on pose $u_0 = t_0 + v_0$, on a
$$\lambda u_0 + f(u_0 - v_0) = \lambda v_0 + g(v_0 - u_0) = 0.$$
3. Montrons qu'il n'y en a qu'une. Soit (u,v) une solution de 2. Alors, avec 1., $h(u-v) = 0$ et par bijectivité de h, $u - v = t_0$. Mais alors $\lambda v + g(-t_0) = 0$ et donc $v = v_0$: finalement, $(u,v) = (t_0 + v_0, v_0)$.
4. On reprend les notations précédentes. On discute suivant que $f^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{g}^{-1}(\{0\})$ est vide ou non.
<u>Premier cas</u> : $f^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{g}^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.
Alors il n'existe pas de $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(u-v) = g(v-u) = 0$.
En effet, s'il en existait, alors $u - v \in f^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{g}^{-1}(\{0\})$: contradiction.
<u>Deuxième cas</u> : $f^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{g}^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$.
On vérifie que l'ensemble cherché est
$$\{(t+v, v) \mid t \in f^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{g}^{-1}(\{0\}), v \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2 X
On s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$.

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Montrer qu'il existe une infinité de points $x \in S(0,R)$ tels que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$ diverge.
3. Montrer qu'il existe une infinité de points $x \in S(0,R)$ tels que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$ converge.
4. Montrer que pour tout $x \in S(0,R)$, il existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S(0,R)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x_k^{(3^n)}$ diverge et (x_k) converge vers x ; et qu'il existe $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S(0,R)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} y_k^{(3^n)}$ converge et (y_k) converge vers x.

Indication 2

Solution 2

1. Avec $x = 1$, comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et comme $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0, on conclut que $R = 1$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $x_k = e^{i\frac{2\pi}{3^k}}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{x_k^{(3^n)}}{n}$. Montrons que $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$, $u_n = \frac{1}{n}$ et comme la série harmonique diverge, $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
   Les x_k sont bien deux à deux distincts, puisque les $\frac{2\pi}{3^k}$ sont deux à deux distincts dans $]0, 2\pi[$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $y_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3^k}\right)}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{y_k^{(3^n)}}{n}$. Montrons que $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$, $v_n = \frac{i^{(3^n)}}{n}$. Or on vérifie facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i^{(3^n)} = (-1)^n i$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$, $v_n = i\frac{(-1)^n}{n}$. On peut alors conclure à la convergence de cette série par le théorème spécial à certaines séries alternées.
4. Soit $x \in S(0,R)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta}$.
   <u>Premier cas</u> : on suppose que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$ converge.
   $\star$ Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = e^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3^k}\right)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, $x_k^{(3^n)} = x^{3^n}$ et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x_k^{(3^n)}$ converge. Par ailleurs, il est clair que (x_k) converge vers x.
   $\star$ On note $D = \{\frac{2\pi p}{3^k} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\}$. D est dense dans $\mathbb{R}$.
   Pour $l \in \mathbb{N}$, il existe un élément de D dans $]\,\theta - \frac{1}{2^l}, \theta + \frac{1}{2^l}\,[$. On le note $\frac{2\pi p_l}{3^{k_l}}$. On pose $y_l = e^{i\frac{2\pi p_l}{3^{k_l}}}$.
   Par construction, (y_l) converge vers x.
   Soit $l \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 3^{k_l}$, $y_l^{(3^n)} = 1$ et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} y_l^{(3^n)}$ diverge.
   <u>Deuxième cas</u> : on suppose que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^{(3^n)}$ diverge.
   $\star$ Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $x_k = e^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3^k}\right)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, $x_k^{(3^n)} = x^{3^n}$ et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x_k^{(3^n)}$ diverge.
   Par ailleurs, il est clair que (x_k) converge vers x.
   $\star$ Pour $l \in \mathbb{N}$, il existe un élément de D dans $]\,\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^l}, \theta - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2^l}\,[$. On le note $\frac{2\pi p_l}{3^{k_l}}$. On pose $y_l = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi p_l}{3^{k_l}}\right)}$. Par construction, (y_l) converge vers x.

Soit $l \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 3^{k_l}$, $y_l^{(3^n)} = (-1)^n i$ et donc $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n} y_l^{(3^n)}$ converge par le théorème spécial à certaines séries alternées.

Exercice 3 X
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Indication 3 On pourra s'intéresser au nombre de façons de descendre un escalier en sautant 1 ou 2 marches.

Solution 3 On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.
On s'intéresse au nombre de manières de descendre un escalier en s'autorisant des sauts de 1 ou deux marches.
D'une part, si on dénombre en regroupant les manières où on fait k sauts de 2 marches, il reste à organiser ces sauts avec les $n - 2k$ marches restantes, i.e. à placer k parmi $n - 2k + k$. Finalement, on trouve bien S_n.
D'autre part, on peut couper en deux paquets ces manières, suivant que l'on commence par un saut de 1 ou un saut de 2. Dans le premier cas il reste $n - 1$ marches, dans l'autre il en reste $n - 2$. On a donc, pour $n \geq 2$,

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Avec les conditions initiales $S_0 = S_1 = 1$, on trouve, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Exercice 4 X
Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On définit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A^i.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.

Indication 4 A est-elle diagonalisable ?

Solution 4 On remarque que $A^n = I_n$, donc $P = X^n - 1$ annule A : ce polynôme est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$, A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On peut calculer le polynôme caractéristique de A et on trouve $X^n - 1$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. A est donc semblable à $D = \operatorname{diag}(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})$. On écrit $A = PDP^{-1}$. Alors

$$B = \frac{1}{p} P \left(\sum_{i=0}^{p-1} D^i \right) P^{-1}.$$

B est inversible si et seulement si $\Delta = \sum_{i=0}^{p-1} D^i$ est inversible. Or cette matrice est diagonale, elle s'écrit, avec $Q = \sum_{i=0}^{p-1} X^i$,

$$\Delta = \mathrm{diag}(Q(1), Q(\omega), \ldots, Q(\omega^{n-1})).$$

B est donc inversible si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(\omega^k) \neq 0$.
Pour $k = 0$, $Q(1) = p \neq 0$.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. $Q(\omega^k) = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\omega^k\right)^i = \frac{1-\omega^{kp}}{1-\omega}$.
$Q(\omega^k) = 0$ si et seulement si n divise kp.
B est donc inversible si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, n ne divise pas kp.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, comme $(n-k)p = np - kp$, n divise $(n-k)p$ si et seulement si n divise kp. On peut donc se limiter aux k dans $[\![1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$.
En décomposant n en produit de nombres premiers (si $n \geq 2$), $n = \prod_{l=1}^{q} p_l^{m_l}$, on peut encore affirmer que B est inversible si et seulement si pour tout $l \in [\![1, q]\!]$, p_l ne divise pas p.
Cela signifie que n et p n'ont pas de facteurs premiers en commun, et donc finalement
B est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

Exercice 5 ENS
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_i| \geq 2$. On pose

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $d_n = \det(A_n)$ est non nul, du signe du produit des a_i.
2. Montrer que A_n possède autant de valeurs propres (comptées avec ordre de multiplicité) strictement positives que de a_i strictement positifs.

Indication 5
On pourra considérer $B_n(t)$ la même matrice que A_n, mais où les 1 sont remplacés par t.

Solution 5

1. Pour $n \geq 3$, en développant d_n suivant la dernière ligne, on obtient

$$d_n = a_n d_{n-1} - d_{n-2}.$$

   Par inégalité triangulaire

$$|d_n| \geq 2|d_{n-1}| - |d_{n-2}|$$

   et finalement,

$$|d_n| - |d_{n-1}| \geq |d_{n-1}| - |d_{n-2}|.$$

   La suite, $(|d_n| - |d_{n-1}|)_{n \geq 2}$ est donc croissante. Or

$$|d_2| - |d_1| = |a_1 a_2 - 1| - |a_1| = |a_1| \left(\left| a_2 - \frac{1}{a_1} \right| - 1 \right) \geq |a_1| \left(2 - \frac{1}{2} - 1 \right) \geq 1 > 0.$$

La suite $(|d_n|)_{n\geq 1}$ est donc croissante et comme $|d_1| = |a_1| \geq 2 > 0$, tous les $|d_n|$ sont strictement positifs : aucun d_n ne peut être nul.
Montrons alors par récurrence que d_n est du signe du produit des a_i.
Pour $n = 1$ c'est immédiat, de même que pour $n = 2$, puisque $d_2 = a_1a_2 - 1$ et que a_1a_2 est plus grand en valeur absolue que 1, donc c'est ce terme qui donne le signe.
Si c'est vrai jusqu'au rang n : comme $d_{n+1} = a_{n+1}d_n - d_{n-1}$ et comme

$$|a_{n+1}d_n| \geq 2|d_n| \geq |d_n| \geq |d_{n-1}|$$

c'est $a_{n+1}d_n$ qui donne son signe, qui est bien celui de $\prod_{i=1}^{n+1} a_i$ puisque d_n est du signe de $\prod_{i=1}^{n} a_i$ par hypothèse de récurrence.

2. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|.\|$: $P \mapsto \sum_{k=0}^{n} |c_k|$, si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} c_kX^k$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, unitaire. Soit λ une racine de P. Alors $|\lambda| \leq \|P\|$. En effet,

$$\lambda^n = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k\lambda^k.$$

Si $|\lambda| \leq 1$, l'inégalité voulue est immédiate, puisque P est unitaire et donc $\|P\| \geq 1$.
Si $|\lambda| > 1$,

$$\lambda = -\sum_{k=0}^{n-1} c_k\lambda^{k-n}$$

et

$$|\lambda| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k||\lambda|^{k-n} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \leq \|P\|.$$

Soit $t \in [0, 1]$. $B_n(t)$ étant diagonalisable, car symétrique réelle, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$. On écrit

$$\chi_{B_n(t)} = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i(t))$$

avec $\lambda_1(t) \leq \cdots \leq \lambda_n(t)$.
$(\lambda_1(0), \ldots, \lambda_n(0))$ est la famille des (a_i), éventuellement réordonnée. On supposera par la suite, que $\lambda_i(0) = a_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, par simplicité d'écriture.
$(\lambda_1(1), \ldots, \lambda_n(1))$ est la famille des valeurs propres de A_n, notée $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
Si on montre que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t \mapsto \lambda_i(t)$ est continue, comme elle ne s'annule pas (cf première question), c'est une fonction de signe constant et donc α_i et a_i sont de même signe : c'est ce qu'on voulait démontrer.
On fixe donc $i \in [\![1, n]\!]$. Pour simplifier, on prend $i = 1$. Soit $t_0 \in [0, 1]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
On veut montrer

$$\exists\eta > 0,\ \forall t \in [0, 1],\ |t - t_0| \leq \eta \implies |\lambda_1(t) - \lambda_1(t_0)| \leq \varepsilon.$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose donc

$$\forall\eta > 0,\ \exists t \in [0, 1],\quad |t - t_0| \leq \eta \quad \text{et} \quad |\lambda_1(t) - \lambda_1(t_0)| > \varepsilon.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On choisit donc $t_k \in [0, 1]$ tel que

$$|t_k - t_0| \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad |\lambda_1(t_k) - \lambda_1(t_0)| > \varepsilon.$$

On note $P = \chi_{B_n(t_0)}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = \chi_{B_n(t_k)}$. Par continuité de la fonction qui à une matrice associe son polynôme caractéristique, (P_k) converge vers P.
La suite (P_k) est donc bornée : on choisit M tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|P_k\| \leq M$.
La remarque en préambule permet d'affirmer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_1(t_k)| \leq M$. Cette suite réelle étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente. On écrit

$$\lambda_1(t_{\varphi(k)}) \underset{k\to+\infty}{\to} \mu.$$

Alors

$$\begin{aligned} |P(\mu)| &\leq |P(\mu) - P_{\varphi(k)}(\mu)| + |P_{\varphi(k)}(\mu) - P_{\varphi(k)}(\lambda_1(t_{\varphi(k)}))| + |P_{\varphi(k)}(\lambda_1(t_{\varphi(k)}))| \\ &\leq \|P - P_{\varphi(k)}\|_{\infty,[-M,M]} + |P_{\varphi(k)}(\mu) - P_{\varphi(k)}(\lambda_1(t_{\varphi(k)}))| + 0 \\ &\leq \|P - P_{\varphi(k)}\|_{\infty,[-M,M]} + \|P'_{\varphi(k)}\|_{\infty,[-M,M]}|\mu - \lambda_1(t_{\varphi(k)})| \end{aligned}$$

Quitte à choisir $M \geq 1$, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|Q'\|_{\infty,[-M,M]} \leq nM^n\|Q\|$ et donc

$$|P(\mu)| \leq \|P - P_{\varphi(k)}\|_{\infty,[-M,M]} + nM^n\|P_{\varphi(k)}\||\mu - \lambda_1(t_{\varphi(k)})|,$$

i.e.

$$|P(\mu)| \leq \|P - P_{\varphi(k)}\|_{\infty,[-M,M]} + nM^{n+1}|\mu - \lambda_1(t_{\varphi(k)})|.$$

Comme $\|.\|_{\infty,[-M,M]}$ et $\|.\|$ sont équivalentes ($\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie), on peut conclure que le membre de droite converge vers 0 et donc que $P(\mu) = 0$.
Il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mu = \lambda_i(t_0)$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_1(t_k) - \lambda_1(t_0)| > \varepsilon$, $\mu \neq \lambda_1(t_0)$ et même $\mu > \lambda_1(t_0)$.
Quitte à extraire successivement on peut ainsi supposer qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $(\lambda_1(t_{\psi(k)}), \dots, \lambda_n(t_{\psi(k)}))$ converge vers $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec

$$\lambda_1(t_0) < \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n.$$

Or, $(P_{\psi(k)})$ converge vers P et $P(\lambda_1(t_0)) = 0$. Posons $\varepsilon = \frac{\mu_1 - \lambda_1(t_0)}{2}$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on ait

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i(t_{\psi(k)}) \geq \mu_i - \varepsilon \geq \mu_1 - \varepsilon \geq \lambda_1(t_0) + \varepsilon$$

et donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i(t_{\psi(k)}) - \lambda_1(t_0)| \geq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $k \geq k_0$

$$|P_{\psi(k)}(\lambda_1(t_0))| \geq \varepsilon^n$$

ce qui contredit

$$P_{\psi(k)}(\lambda_1(t_0)) \underset{k\to+\infty}{\to} P(\lambda_1(t_0)) = 0.$$

Exercice 6 ENS
On dit que $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est équidistribuée si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2k\pi x_n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Soit α un irrationnel. Montrer que $(x_n) = (\alpha n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée.

2. Soit (x_n) telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(x_{n+k} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée. On veut montrer que (x_n) est équidistribuée.
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 1$.
   (a) Soit $(H, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leq H \leq N$. Montrer que
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right| \leq \frac{2H}{N} + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right|.$$
   (b) Montrer que
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right|^2}.$$
   (c) Conclure en posant, pour $\ell \in \mathbb{Z}^*$, $(a_n) = (e^{i2\ell\pi x_n})$.

Solution 6

1. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons
$$u_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2k\pi\alpha n}$$
et montrons que $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On peut réécrire
$$u_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(e^{i2k\pi\alpha})^n = \frac{1}{N}\frac{1-e^{i2k\pi\alpha N}}{1-e^{i2k\pi\alpha}}$$
car $e^{i2k\pi\alpha} \neq 1$ puisque α est irrationnel. On a alors
$$|u_N| \leq \frac{2}{N|1-e^{i2k\pi\alpha}|}.$$
Par domination, on a bien $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. (a)
$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n + \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} + \cdots + \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+H-1}$$
la somme comportant H termes. On effectue dans les dernières sommes un changement d'indice
$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n + \cdots + \sum_{n=H-1}^{N+H-2} a_n.$$
Puis on ajoute ou retranche des termes pour faire apparaître $\sum\limits_{n=0}^{N-1} a_n$ à chaque fois
$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k} = H\sum_{n=0}^{N-1} a_n + a_N - a_0 + \cdots + \sum_{n=N}^{N+H-2} a_n - \sum_{n=0}^{H-2} a_n.$$
Il vient
$$H\sum_{n=0}^{N-1} a_n = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k} - \left(a_N - a_0 + \cdots + \sum_{n=N}^{N+H-2} a_n - \sum_{n=0}^{H-2} a_n\right).$$

Les derniers termes sont par paquets de deux et dans chaque paquet, les deux termes sont des sommes d'au plus $H-1$ termes :

$$\left|H\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right| + (H-1)\times 2\times(H-1)$$

ou encore

$$\left|H\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right| + 2H^2.$$

On conclut en divisant par NH.

(b) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right| \leq \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}1^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right|^2}.$$

Finalement

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right| \leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} a_{n+k}\right|^2}.$$

(c) Soit $l \in \mathbb{Z}^*$. On pose $(a_n) = (e^{i2\ell\pi x_n})$. Avec ce qui précède, pour $(H,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leq H \leq N$,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi x_n}\right| \leq \frac{2H}{N} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} e^{i2\ell\pi x_{n+k}}\right|^2}.$$

Comme $e^{i2\ell\pi x_n}$ est de module 1, on peut réécrire

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi x_n}\right| \leq \frac{2H}{N} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} e^{i2\ell\pi (x_{n+k}-x_n)}\right|^2}.$$

On développe la dernière somme en utilisant que pour un complexe $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} e^{i2\ell\pi (x_{n+k}-x_n)}\right|^2 = \frac{1}{H^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{H-1}\sum_{j=0}^{H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_n)}e^{-i2\ell\pi(x_{n+j}-x_n)}.$$

On isole les termes pour $j = k$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\frac{1}{H}\sum_{k=0}^{H-1} e^{i2\ell\pi (x_{n+k}-x_n)}\right|^2 \quad &= \quad \frac{NH}{H^2} + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{0\leq k<j\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{0\leq j<k\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})}.\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes se traitent de manière symétrique. On ne va étudier que la première.

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{0\leq k<j\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})} = \sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})}.$$

On effectue le changement d'indice $m = n + j$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{0\leq k<j\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})} = \sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=j}^{N+j-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}.$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{0\leq k<j\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})} = \sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)} + \sum_{m=N}^{N+j-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)} - \sum_{m=0}^{j-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right).$$

Les deux dernières sommes sont majorées en module par j. On a donc

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{0\leq k<j\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})}\right| \leq \sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left(\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right| + 2j\right)$$

ou encore

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{0\leq k<j\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})}\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right|\right) + \frac{(H-1)H(2H-1)}{3}$$

qui donne aussi

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{0\leq k<j\leq H-1} e^{i2\ell\pi(x_{n+k}-x_{n+j})}\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right|\right) + \frac{2H^3}{3}.$$

Finalement

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi x_n}\right| \leq \frac{2H}{N} + \sqrt{\frac{1}{N}\left(\frac{N}{H} + \frac{4H^3}{3} + \sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right| + \sum_{k=0}^{H-2}\sum_{j=k+1}^{H-1}\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right|\right)}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On choisit H tel que $\frac{1}{H} \leq \varepsilon^2$.
$\frac{2H}{N}$ et $\frac{4H^3}{3N}$ convergent vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. A partir d'une certain N_0, on a donc

$$\frac{2H}{N} \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{4H^3}{3N} \leq \varepsilon^2.$$

Chaque $\frac{1}{N}\sum\limits_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}$ converge vers 0 et on a un nombre fini de fois ce type de sommes (H est dorénavant fixé), donc les deux autres sommes convergent vers 0 et à partir d'un certain rang $N_1 \geq N_0$,

$$\sum_{j=1}^{H-1}\sum_{k=0}^{j-1}\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right| + \sum_{k=0}^{H-2}\sum_{j=k+1}^{H-1}\left|\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi(x_{m-j+k}-x_m)}\right| \leq \varepsilon^2.$$

Donc, pour $N \geq N_1$:

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\ell\pi x_n}\right| \leq \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2+\varepsilon^2} \leq 3\varepsilon.$$

On a bien montré que (x_n) est équidistribuée.