X-ENS

Planche 1 PLCR
Soit E un ensemble. Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante pour l'inclusion.

1. Montrer que φ possède un point fixe.
2. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ injective et soit $g : F \to E$ injective.
   En considérant $\psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto E \setminus g(F \setminus f(A)))$ montrer qu'il existe une bijection de E sur F. (Théorème de Cantor Bernstein)

Planche 2 L
On munit $E = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de sa structure de groupe additif : $a + b = (a_n + b_n)$ si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$. On note E^* l'ensemble des morphismes de groupes de E dans $\mathbb{Z}$. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si un élément f de E^* est nul en chaque e_k, alors f est nulle.

Planche 3 CR
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Planche 4 CR
Soit K un corps.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :
   (i) K est algébriquement clos
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in \mathcal{L}(K^n)$, u admet un vecteur propre.
2. Montrer que deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui commutent ont un vecteur propre en commun.

Planche 5 P
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient u et v deux endomorphismes de E qui ont les mêmes sous-espaces stables.

1. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.
2. Commutent-ils ?

Planche 6 P
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, u un endomorphisme de E et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des vecteurs propres de u tels que, pour toute partie I de cardinal n de $[\![1, n+1]\!]$, $(x_i)_{i \in I}$ soit libre. Que dire de u ?

Planche 7 L
Dans un espace euclidien E, on considère une famille génératrice $(x_1, \ldots, x_n)$. On note C l'enveloppe convexe des x_i.

1. Montrer l'existence d'un point de C qui minimise $\| \ \|$ sur C.

On suppose, pour tout y de E : $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle y, x_i \rangle \geq 0) \quad \Longrightarrow \quad (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle y, x_i \rangle = 0)$.

2. Montrer que 0 est dans C.
3. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée par des coefficients positifs.
4. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée par des coefficients strictement positifs.

Planche 8 P
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) il existe une norme N pour laquelle A est une isométrie,
(ii) pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\{A^k X,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est borné,
(iii) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec des valeurs propres de module 1.

Planche 9 CR
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose f surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas un compact.
2. On suppose que f est convexe et que l'ensemble des zéros de f est un compact non vide. Montrer que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Planche 10 PLCR
Si E est un espace vectoriel réel, C une partie convexe de E et x un point de C, on dit que x est un point extrémal de C lorsque $C \setminus \{x\}$ est convexe.
On considère ici l'espace E des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Déterminer les points extrémaux de la boule unité fermée de E pour la norme de la convergence en moyenne quadratique et pour la norme de la convergence uniforme.

Planche 11 L

Déterminer toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x)}{t^2}dt$ converge.

Planche 12 P

1. Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limites uniformes sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes réels.
2. Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Planche 13 PLCR

On admet le théorème suivant : si une série entière a un rayon de convergence infini et si sa somme est bornée sur $\mathbb{C}$, alors cette somme est constante.
On note G l'ensemble des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continues telles que pour tout $\alpha \geq 0$, $t \mapsto e^{\alpha|t|}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in G$ et x réel, on pose $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}dt$.

1. Montrer que G ne contient pas que la fonction nulle.
2. Soit $f \in G$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Soient $f \in G$, $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On pose $\varphi_a(z) = \displaystyle\int_a^{+\infty} e^{iz(t-a)}f(t)dt$. Montrer que φ_a est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et est bornée sur le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.
4. Soit $f \in G$ telle que $\hat{f} = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(t-a)}f(t)dt$ est nul pour tous a, z. En déduire que φ_a est, pour tout $a \in \mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{C}$.
5. Montrer que $f \mapsto \hat{f}$ est injective.

Planche 14 CR

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f''(x) = f(x)$.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Planche 15 CR
On note E l'ensemble des fonctions $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continûment dérivables et bornées. Soit a un réel strictement positif. Si $f \in E$, on considère $(\mathcal{E}_f)$ l'équation différentielle $y' - ay + f = 0$.

1. Exprimer les solutions de $(\mathcal{E}_f)$. Montrer qu'une et une seule de ces solutions est dans E. On la note $\Phi(f)$.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme injectif de E. Déterminer les valeurs propres de Φ.
3. Soit f dans E, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $\Phi(f)$ est positive et intégrable sur $[1, +\infty[$.

Planche 16 CR
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle : $(\mathcal{E})$ $X' = AX$.

1. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est à valeurs dans un sous-espace affine de direction $\mathrm{Im}(A)$.
2. On suppose A antisymétrique. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ est de norme constante.
   Dans le cas où $n = 3$, que dire de la trajectoire d'une solution ?
3. On suppose que toute solution de $(\mathcal{E})$ est de norme constante. Montrer que A est antisymétrique.

Planche 17 P
On considère des variables aléatoires réelles X,Y et Z, discrètes. On suppose que $X + Y$ suit la même loi que $X + Z$.

1. Peut-on affirmer que Y et Z suivent la même loi ?
2. Et si X, Y et Z sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$?
3. Et si X, Y et Z sont indépendantes et bornées ?

Planche 18 P
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice aléatoire $M_n = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où les $X_{i,j}$ sont des variables de Rademacher indépendantes, $\mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\det(M_n))$ et $\mathbb{V}(\det(M_n))$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = {}^tAA$. Montrer : $\det(B) \leq \prod_{i=1}^{n} b_{i,i}$.
3. Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que, quand $n \to +\infty$, $\mathbb{P}(|\det(M_n)| = n^{n/2}) = \mathcal{O}(a^n)$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Que dire de $\mathbb{P}(|\det(M_n)| \geq n^{n/2-\varepsilon})$?

Planche 19 X

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $x^2 = x$ pour tout $x \in A$. Montrer que A est commutatif.
2. Montrer que la conclusion subsiste si on suppose $x^4 = x$ pour tout $x \in A$ ou bien si on suppose $x^3 = x$ pour tout $x \in A$.

Planche 20 X
Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, quel est le signe de $P(x)P''(x) - P'(x)^2$?

Planche 21 X

1. Trouver les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.
2. Trouver les fractions rationnelles F de $\mathbb{C}(X)$ stabilisant le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$.

Planche 22 X
Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V)$ un morphisme d'algèbres. Montrer que n divise $\dim(V)$ et qu'il existe une base β de V telle que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Mat}_\beta(\Phi(A)) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Planche 23 X
Caractériser tous les $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tels que pour tout $M \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), u({}^tM) = {}^t(u(M))$.

Planche 24 X
Soit u un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que $(u - 2\mathrm{Id}_E)^2 = 0$. Calculer $\exp(u)$.

Planche 25 X
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose ${}^tYX \neq 0$, $AX = \lambda X$, ${}^tAY = \lambda Y$ et $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n - 1$. Quelle est la multiplicité de λ dans χ_A ?

Planche 26 X

1. Soit $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer
$$|\det(\mathrm{M})| \leq \sqrt{\prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{M}_{\mathrm{i,j}}^2\right)}.$$

2. Si $p \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs d'un espace euclidien $(E(.|.))$, on pose $G(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1\leq i,j\leq p}$. Montrer
$$|\det(G(x_1, \dots, x_p))| \leq \prod_{i=1}^{p} \|x_i\|^2.$$

3. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$ avec $p < q$, $x_1, \dots x_q$ des vecteurs d'un espace euclidien $(E(.|.))$. Comparer $|\det(G(x_1, \dots, x_q))|$ et $|\det(G(x_1, \dots, x_p))| \times |\det(G(x_{p+1}, \dots, x_q))|$.

Planche 27 X

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la matrice canonique du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}x$.

Planche 28 X

Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \begin{pmatrix} v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que H_n possède n valeurs propres distinctes.

2. On note $\lambda_{n,1} < \lambda_{n,2} < \dots < \lambda_{n,n}$ les valeurs propres de H_n. Montrer que l'on a
$$\lambda_{n,1} < \lambda_{n-1,1} < \lambda_{n,2} < \dots < \lambda_{n,n-1} < \lambda_{n-1,n-1} < \lambda_{n,n}.$$

Planche 29 X

Montrer que $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Planche 30 X

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\sin(x)\ln(x) = 1$ possède une unique solution dans $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$. On la note x_n.

2. Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes.

Planche 31 X

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs telles que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, la série de terme général b_n converge et la série de terme général na_n diverge.

1. Montrer qu'il existe une unique suite réelle (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k a_{n-k} + b_n$.

2. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

3. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\ell = 0$.

Planche 32 X

Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x).$$

Planche 33 X

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\|f'\|_\infty \leq \frac{2}{b-a}\|f\|_\infty + \frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty.$$

Planche 34 X

Pour $0 < b < a$, on pose $G(a, b) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$.

1. Montrer que $G\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = G(a, b)$.

On définit la suite $((a_n, b_n))$ par $(a_0, b_0) = (a, b)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n+b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$.

2. Etudier la suite de terme général (a_n, b_n).

3. Que dire de $G(a, b)$?

Planche 35 X

Soit (a_n) une suite réelle convergeant vers 0 telle que $\sum |a_{k+1} - a_k|$ converge. Montrer que, pour tout réel x, $\sum a_k \sin(kx)$ converge. Indiquer des intervalles de convergence uniforme.

Planche 36 X

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit le groupe S_n de la loi uniforme. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'un élément de S_n.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n)$.
2. Déterminer la loi de X_n.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$