VARIABLES ALEATOIRES

Proposition 1
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Soit X une variable aléatoire. On s'intéresse à l'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$. On écrit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$. Alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} X(\omega_k) P(\{\omega_k\}).$$

Proposition 2
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. L'espérance est linéaire et croissante sur l'ensemble des variables aléatoires à valeurs réelles $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

Proposition 3 (Théorème du transfert)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est une variable aléatoire à valeurs réelles et

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Proposition 4
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles.
(i) $V(X) \geq 0$.
(ii) $V(X) = 0 \iff X$ est constante (hors ses valeurs atteintes avec une probabilité nulle).

Proposition 5
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles.
(i) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
(ii) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Proposition 6 Inégalité de Bienaymé Tchébychev
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles.
Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Proposition 7
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux parties finies de $\mathbb{R}$. Alors

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) P(Y \in B).$$

Proposition 8
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement et à valeurs réelles. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Proposition 9
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur (Ω, P) un espace probabilisé fini. Alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Proposition 10
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors, pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 11
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$, et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes qui suivent chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors $X_1 + \cdots X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Proposition 12
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Alors

$$E(Y) = np \quad \text{et} \quad V(Y) = np(1-p).$$