SUITES NUMERIQUES

Proposition 1
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On s'intéresse à

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n\}.$$

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. On s'intéresse alors à l'équation caractéristique

$$r^2 - \alpha r - \beta = 0.$$

• Si cette équation caractéristique possède deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$, notées r_1 et r_2, alors, $((r_1^n), (r_2^n))$ est une base de E.

• Si cette équation caractéristique possède une racine double dans $\mathbb{K}$, notée r, alors $((r^n), (nr^n))$ est une base de E si $r \neq 0$; sinon on prend $((1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots))$.

• Si cette équation caractéristique ne possède pas de racine dans $\mathbb{K}$, alors elle en possède deux conjuguées dans $\mathbb{C}$. On en note une $\rho e^{i\theta}$ (l'autre est $\rho e^{-i\theta}$). Alors $((\rho^n \cos(n\theta), \rho^n \sin(n\theta))$ est une base de E.

Proposition 2
Toute suite convergente dans $\mathbb{K}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3 (Passage à la limite dans les inégalités)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n$$

et **si** (u_n), (v_n) et (w_n) **convergent** vers λ, μ et ν respectivement dans $\mathbb{R}$,
alors

$$\lambda \leq \mu \leq \nu.$$

Théorème 1 (d'encadrement)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n$$

et si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite λ,
alors (v_n) converge aussi vers λ.

Théorème 2
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n$$

et que (u_n) diverge vers $+\infty$. Alors, (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Théorème 3 (de la limite monotone)
Toute suite réelle croissante et majorée converge et sa limite est la borne supérieure de ses valeurs.
(Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.)

Théorème 4 (des suites adjacentes)
Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) adjacentes i.e. :
(i) la suite (u_n) est croissante,
(ii) la suite (v_n) est décroissante,
(iii) la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
Alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite λ et cette limite est le seul réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lambda \leq v_n$.

Proposition 4 (Suites extraites)
Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers λ dans $\mathbb{K}$.
Alors, toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers λ.
Si (u_n) est à valeurs réelles et diverge vers $+\infty$, alors toute suite extraite de (u_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Théorème 5 (des croissances comparées)

$$\begin{array}{lrcll}
\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & (\ln n)^\alpha & = & o(n^\beta) & [n \to \infty] \\
\forall(a,\alpha) \in]1,+\infty[\times \mathbb{R} & n^\alpha & = & o(a^n) & [n \to \infty] \\
\forall a \in \mathbb{R}_+^* & a^n & = & o(n!) & [n \to \infty] \\
\forall(a,\alpha) \in]0,1[\times \mathbb{R} & a^n & = & o(n^\alpha) & [n \to \infty]
\end{array}$$