SUITES NUMERIQUES

Proposition 1
Toute suite convergente dans $\mathbb{K}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2
Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certains rang.

Proposition 3 (Passage à la limite dans les inégalités)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n$ et **si** (u_n), (v_n) et (w_n) **convergent** vers λ, μ et ν respectivement dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lambda \leq \mu \leq \nu.$$

Théorème 1 (d'encadrement)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite λ, alors (v_n) converge aussi vers λ.

Théorème 2
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On suppose qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq v_n$$

et que (u_n) diverge vers $+\infty$. Alors, (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Théorème 3 (de la limite monotone)
Toute suite réelle croissante et majorée converge et sa limite est la borne supérieure de ses valeurs.
Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Théorème 4 (des suites adjacentes)
Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) adjacentes i.e. :
(i) la suite (u_n) est croissante,
(ii) la suite (v_n) est décroissante,
(iii) la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
Alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite λ et cette limite est le seul réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lambda \leq v_n$.

Proposition 4 (Suites extraites)
Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers λ dans $\mathbb{K}$.
Alors, toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers λ.

Si (u_n) est à valeurs réelles et diverge vers $+\infty$, alors toute suite extraite de (u_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Théorème 5 (**de Bolzano-Weierstrass**)
Toute suite bornée dans $\mathbb{K}$ possède au moins une sous-suite convergente.

Théorème 6 (**Caractérisation séquentielle de la densité**)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel x est limite d'une suite d'éléments de A.

Théorème 7 (**des croissances comparées**)

$$\begin{array}{lrcll}
\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & (\ln n)^\alpha & = & o(n^\beta) & [n\to\infty] \\
\forall(a,\alpha)\in]1,+\infty[\times\mathbb{R} & n^\alpha & = & o(a^n) & [n\to\infty] \\
\forall a\in\mathbb{R}_+^* & a^n & = & o(n!) & [n\to\infty] \\
\forall(a,\alpha)\in]0,1[\times\mathbb{R} & a^n & = & o(n^\alpha) & [n\to\infty]
\end{array}$$

Proposition 5
(i) Soit $r\in\mathbb{K}$. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+r$.
Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0+nr$.
(ii) Soit $a\in\mathbb{K}$. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n$.
Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0a^n$.
(iii) Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ avec $a\neq 1$. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+b$.
Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{b}{1-a}+\left(u_0-\frac{b}{1-a}\right)a^n$.

Proposition 6
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$. On s'intéresse à

$$E=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\alpha u_{n+1}+\beta u_n\}.$$

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. On s'intéresse alors à l'équation caractéristique

$$r^2-\alpha r-\beta=0.$$

- Si cette équation caractéristique possède deux racines distinctes dans $\mathbb{K}$, notées r_1 et r_2, alors, $((r_1^n),(r_2^n))$ est une base de E.
- Si cette équation caractéristique possède une racine double dans $\mathbb{K}$, notée r, alors $((r^n),(nr^n))$ est une base de E si $r\neq 0$; sinon on prend $((1,0,0,\ldots),(0,1,0,\ldots))$.
- Si cette équation caractéristique ne possède pas de racine dans $\mathbb{K}$, alors elle en possède deux conjuguées dans $\mathbb{C}$. On en note une $\rho e^{i\theta}$ (l'autre est $\rho e^{-i\theta}$). Alors $((\rho^n\cos(n\theta)),(\rho^n\sin(n\theta)))$ est une base de E.