SERIES NUMERIQUES

Théorème 1 (**Séries géométriques**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$; lorsqu'elle converge, sa somme vaut $\frac{1}{1-z}$.

Théorème 2 (**Transformation suite-série**)
Soit (u_n) une suite numérique.

(u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Théorème 3
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et monotone.
(i) Si f est croissante, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^N f \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_1^{N+1} f.$$

(ii) Si f est décroissante, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^{N+1} f \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^{N} f.$$

Théorème 4 (**Séries de Riemann**)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 5 (**de comparaison**)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs.

(i) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(i) Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 6 (**Comparaison à une série de Riemann.**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(i) S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ et $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $n^\alpha u_n \to l$, alors $\sum u_n$ diverge.

Théorème 7 (**Comparaison à une série géométrique.**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) si $\frac{u_n}{r^n} \to 0$ et si $r < 1$, $\sum u_n$ converge,

(ii) si $\frac{u_n}{r^n} \to l$, avec $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et si $r \geq 1$, $\sum u_n$ diverge.

Théorème 8
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Théorème 9 (**de comparaison**)
Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à valeurs positives.

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.