SERIES NUMERIQUES

Proposition 1 (**Séries géométriques**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$; lorsqu'elle converge, sa somme vaut $\frac{1}{1-z}$.

Proposition 2 (**Transformation suite-série**)
Soit (u_n) une suite numérique.

(u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Proposition 3 (**Linéarité de la somme**)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques convergentes. Soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Proposition 4
(i) Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.
(ii) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Proposition 5
Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge} \quad &\iff \quad \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent} \\ &\iff \quad \sum \overline{u_n} \text{ converge.} \end{aligned}$$

Proposition 6
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si c'est le cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right).$$

Proposition 7 (**Séries de Riemann**)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 1 (**de comparaison**)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

(iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 2 (**développement décimal illimité propre d'un réel**)
Tout réel positif x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$, où (d_n) est une suite d'entiers naturels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n \leq 9$ et qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.
Cette écriture est le développement décimal illimité propre de x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on note a_n la partie entière de $10^n x$, alors $d_0 = a_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = a_{n+1} - 10a_n$.

Théorème 3
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Proposition 8 (**de comparaison**)
Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à valeurs positives.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Proposition 9
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et monotone.

(i) Si f est décroissante, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$,

$$\int_{p+1}^{q+1} f \leq \sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_{p}^{q} f.$$

(ii) Si f est croissante, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq p < q$,

$$\int_{p}^{q} f \leq \sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_{p+1}^{q+1} f.$$