PROBABILITES

Proposition 1
Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E_1, \ldots, E_n$, n événements deux à deux incompatibles. Alors
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).$$

Proposition 2
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, P étant la probabilité uniforme. Alors pour tout événement E,
$$P(E) = \frac{\mathrm{Card}(E)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Proposition 3
(i) $P(\emptyset) = 0$.
(ii) Soit A un événement.
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$
(iii) P est croissante : pour A et B deux événements,
$$A \subset B \qquad \Longrightarrow \qquad P(A) \leq P(B).$$
(iv) Soient A et B deux événements,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Proposition 4 (Formule des probabilités composées)
(i) Soient A et B deux événements tels que $P(A) > 0$. Alors,
$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A).$$
(ii) Soient A, B et C trois événements tels que $P(A \cap B) > 0$, alors
$$P(A \cap B \cap C) = P_{A\cap B}(C)P_A(B)P(A).$$
(iii) Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ $(n \geq 2)$.
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \cdots P_{A_1}(A_2)P(A_1).$$

Proposition 5 (Formule des probabilités totales)
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. $(n \in \mathbb{N}^*)$
Soit B un événement :
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Proposition 6 (Formule de Bayes)
(i) Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

(ii) Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. ($n \in \mathbb{N}^*$)
Soit B un événement de probabilité non nulle. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$. Alors :

$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P_{A_{i_0}}(B)P(A_{i_0})}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)}.$$