POLYNOMES

Proposition 1 (Opérations sur les degrés)
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
(i) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
(ii) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
(iii) $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Théorème 1 (Division euclidienne)
Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que

$$A = BQ + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Proposition 2 (Degré et dérivation)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.
(i) $\deg(P') = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg(P) \leq 0 \\ \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1. \end{cases}$
(ii) On a l'équivalence : $(\deg(P) \leq n \iff P^{(n+1)} = 0)$.

Proposition 3 (Formule de Leibniz)
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Théorème 2 (Formule de Taylor)
Soient $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, $n = \deg(P)$ et $a \in \mathbb{K}$. On a les égalités :

$$P(a+X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \qquad \text{et} \qquad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Proposition 4
Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$, possède au plus n racines deux à deux distinctes.

Proposition 5 (Caractérisation des racines multiples)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. a est zéro de P de multiplicité exactement m si et seulement si :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad P^{(k)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Théorème 3 (de d'Alembert-Gauss)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à 1. Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition 6
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Proposition 7
Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 4
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
(i) les polynômes de degré 1,
(ii) les polynômes de degré 2, de discriminant strictement négatif.

Proposition 8
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose de manière unique à l'ordre près en le produit de polynômes unitaires irréductibles et de son coefficient dominant.

Proposition 9 (Relations coefficients-racines)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, qui s'écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. On suppose P scindé et on note $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ ses racines. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Pour $n = 2$, si $P = aX^2 + bX + c$ est scindé de racines x_1 et x_2, on a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$