METHODE DU PIVOT DE GAUSS

1 Définitions.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On note (E_{ij}) la famille des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, i.e. sa base canonique.

1.1 Opérations élémentaires.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle opération élémentaire sur A toute opération de l'un des trois types suivants :

(i) multiplication d'une ligne (ou d'une colonne) de A par un scalaire non nul,
(ii) permutation de deux lignes (ou de deux colonnes) de A,
(iii) addition à une ligne (respectivement une colonne) de A, du produit par un scalaire d'une autre ligne (respectivement d'une autre colonne) de A.

Les opérations élémentaires précédemment définies vont pouvoir être réalisées grâce aux trois types de matrices suivantes.

1.2 Matrice de dilatation.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on appelle matrice de dilatation la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $D_i(\alpha)$, définie par :

$$D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où le α est dans la i-ème colonne.

1.3 Matrice de permutation.

Pour tout $(i,j) \in \llbracket\, , n\rrbracket^2$, $i \neq j$, on appelle <u>matrice de permutation</u> la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $P_{i,j}$, définie par :

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & \text{\Large 0} & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& \text{\Large 0} & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

où les deux 1 en dehors de la diagonale sont respectivement en colonne i et j.

1.4 Matrice de transvection.

Pour tout $(i,j) \in \llbracket\, , n\rrbracket^2$, $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on appelle <u>matrice de transvection</u> la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $T_{i,j}(\alpha)$, définie par :

$$T_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & \text{\Large 0} & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & \alpha & & \cdots & & 1 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& \text{\Large 0} & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

où le α est à l'intersection de la j-ème colonne et de la i-ème ligne.

2 Propriétés.

2.1 Propriétés des matrices de dilatation.

Proposition

Soient $i \in [\![1, n]\!]$ **et** $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

1. $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$.
2. **Une matrice de dilatation est inversible et** $D_i(\alpha)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
3. **Si** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $D_i(\alpha)A$ **est la matrice obtenue en remplaçant la** i**-ème ligne de** A, L_i, **par la ligne** αL_i. **On note cette opération** $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.
4. **Si** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $AD_i(\alpha)$ **est la matrice obtenue en remplaçant la** i**-ème colonne de** A, C_i, **par la colonne** αC_i. **On note cette opération** $C_i \longleftarrow \alpha C_i$.

2.2 Propriétés des matrices de permutation.

Proposition

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

1. $P_{i,j} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$.
2. **Une matrice de permutation est inversible et** $P_{i,j}^{-1} = P_{ij}$.
3. **Si** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P_{ij}A$ **est la matrice obtenue en permutant la** i**-ème et la** j**-ème ligne de** A. **On note cette opération** $L_i \longleftrightarrow L_j$.
4. **Si** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, AP_{ij} **est la matrice obtenue en permutant la** i**-ème et la** j**-ème colonne de** A. **On note cette opération** $C_i \longleftrightarrow C_j$.

2.3 Propriétés des matrices de transvection.

Proposition

Soient $i \in [\![1, n]\!]$ **et** $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

1. $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$.
2. **Une matrice de transvection est inversible et** $T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$.
3. **Si** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $T_{ij}(\alpha)A$ **est la matrice obtenue en remplaçant la** i**-ème ligne de** A, L_i, **par la ligne** $L_i + \alpha L_j$. **On note cette opération** $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.
4. **Si** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $AT_{ij}(\alpha)$ **est la matrice obtenue en remplaçant la** j**-ème colonne de** A, C_j, **par la colonne** $C_j + \alpha C_i$. **On note cette opération** $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$.

3 Algorithme de Gauss-Jordan.

3.1 Matrices échelonnées.

Définitions

- Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  - ◇ Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont.
  - ◇ A partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.
- On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Remarque : on pourrait définir de même la notion de matrice échelonnée par colonnes.

3.2 Algorithme de Gauss-Jordan.

Théorème (Algorithme du pivot de Gauss-Jordan)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice E (carrée de taille n) produit de matrices de transvection, de matrices de dilatation et de matrices de permutation, et une matrice T (de taille (n, p)) échelonnée par lignes telles que $A = ET$.
On peut ainsi, par des opérations élémentaires sur les lignes, transformer A en une matrice échelonnée (par lignes).

3.3 Applications.

3.3.1 Calcul du rang d'une matrice.

La méthode du pivot de Gauss permet de calculer le rang d'une matrice : la multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible de change pas le rang d'une matrice. Avec les notations du dernier théorème, le rang de A est celui de T. Or le rang de T est facile à calculer puisque T est échelonnée (c'est le nombre de pivots).

3.3.2 Résolution de systèmes.

La méthode du pivot de Gauss permet aussi de résoudre des systèmes linéaires d'équations. On effectue les mêmes opérations sur les lignes du second membre du système que celles sur la matrice associée du système : on obtient alors un système équivalent facile à résoudre puisqu'il est échelonné.