

NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

Proposition 1 (Inégalités triangulaires)Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Proposition 2 (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.)Soient z et z' dans \mathbb{C} .

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff (z = 0 \text{ ou } \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z' = \alpha z).$$

Formulaire 1 (Formules d'Euler)Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Formulaire 2 (Formule de Moivre)Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Formulaire 3Soient a et b dans \mathbb{R} .

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos a \cos b = (\cos(a + b) + \cos(a - b)) / 2$$

$$\sin a \sin b = (\cos(a - b) - \cos(a + b)) / 2$$

$$\cos a \sin b = (\sin(a + b) - \sin(a - b)) / 2$$

Formulaire 4Soient a et b dans $I = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

$$\text{si } a + b \in I, \quad \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\text{si } a - b \in I, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Proposition 3 (Somme et produit des racines d'une équation du second degré)

Soient a , b et c dans \mathbb{C} , avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe δ dans \mathbb{C} tel que $\delta^2 = \Delta$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux racines dans \mathbb{C} . On les note r_1 et r_2 (éventuellement elles sont confondues). On a alors (à l'ordre près)

$$r_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

et

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Proposition 4 (Racines n -ièmes de l'unité)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité, i.e. l'ensemble des nombres complexes $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On a

$$\mathbb{U}_n = \{e^{ik\frac{2\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}.$$

Proposition 5 (Interprétation géométrique des racines n -ièmes de l'unité)

Les images dans le plan complexe des racines n -ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle unité.

Proposition 6 (Nombres complexes et géométrie plane)

Soient A , B , C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives a , b , c et d .

- (i) A , B et C sont alignés si et seulement si ($a = b$ ou $\frac{c-a}{b-a}$ est réel).
- (ii) \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux si et seulement si ($a = b$ ou $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur).