MATRICES

n, p et q désignent des entiers naturels non nuls.

Proposition 1 (**Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**)
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie np.

Proposition 2
On note $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(E'_{i,j})$ celle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(E''_{i,j})$ celle de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, q]\!],\ \forall (k,l) \in [\![1, p]\!]^2, \quad E_{i,k}E'_{l,j} = \delta_{k,l}E''_{i,j}.$$

Proposition 3 (**Formule du binôme**)
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = BA$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Proposition 4 (**Propriétés de la transposition**)
(i) La transposition est linéaire.
(ii) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.
(iii) $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
(iv) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Proposition 5
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$. On note A la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, X celle de x dans $\mathcal{B}$ et Y celle de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$. On a alors

$$Y = AX.$$

Proposition 6 (**Changement de base pour un vecteur**)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (i.e. les colonnes de P sont les matrices représentatives des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$, c'est aussi la matrice représentative de l'identité dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$). Soit $x \in E$. On note X la matrice représentative de x dans $\mathcal{B}$ et X' celle de x dans $\mathcal{B}'$. Alors

$$X = PX'.$$

Proposition 7 (**Changement de bases pour une application linéaire**)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q celle de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note A la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et A' celle de f dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Proposition 8 (**Changement de base pour un endomorphisme**)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ et A' celle de f dans $\mathcal{B}'$. Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

Théorème 1 (**du rang, version matricielle**)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$

Proposition 9
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.

Proposition 10 (**Caractérisation du rang par les matrices extraites**)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
(i) Si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors toute sous-matrice de A est de rang au plus r.
(ii) $\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une sous-matrice de A carrée de taille r inversible et aucune sous-matrice de A carrée de taille $s > r$ n'est inversible.

Proposition 11
Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) M et N sont semblables,
(ii) il existe $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E tels que M soit la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$ et N celle de u dans $\mathcal{C}$.

Proposition 12 (**Propriétés de la trace d'une matrice**)
(i) La trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(ii) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.
(iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
(iv) La trace est un invariant de similitude.

Proposition 13 (**Propriétés de la trace d'un endomorphisme**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
(i) La trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{L}_(E)$.
(ii) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$.

Proposition 14 (**Trace et rang d'un projecteur**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit p un projecteur de E. Alors $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.