INTEGRATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS REELLES OU COMPLEXES

Théorème 1 (**Théorème de Heine**)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur le $[a,b]$. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Proposition 1
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'application qui à f continue sur $[a,b]$ associe $\int_a^b f$ est une forme linéaire positive.

Proposition 2
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a,b]$ alors

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|.$$

Proposition 3 (**Relation de Chasles**)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a,b]$. Soit $c \in]a,b[$. Alors f est continue sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition 4
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs positives telles que $\int_a^b f = 0$. Alors $f = 0$.

Théorème 2 (**de Riemann**)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit f continue sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$ (ou $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$). Alors $(R_n(f))$ converge vers $\int_a^b f$.

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Théorème 3 (**fondamental**)
Soit a dans I et soit f continue sur I.

(i) la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a,
(ii) f possède une primitive sur I,
(ii) pour toute primitive h de f sur I, pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a).$$

Proposition 5
Soit a dans I et soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, pour $x \in I$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Proposition 6 (**Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes**)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs complexes. On suppose que f' est bornée sur I : i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t dans I, $|f'(t)| \leq M$. Alors f est M-lipschitzienne sur I, i.e. pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Proposition 7 (**Intégration par parties**)
Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Pour tout (a, b) dans I^2

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Proposition 8 (**Changement de variable**)
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit f dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ avec $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tout (α, β) dans J^2

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Théorème 4 (**Taylor avec reste intégral**)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Théorème 5 (**Inégalité de Taylor-Lagrange**)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur I par une constante notée M_{n+1}. Pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Théorème 6 (**Formule de Taylor-Young**)
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$. Soit $x_0 \in I$.
Alors f possède un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad [x \to x_0].$$