

INTEGRATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS
REELLES OU COMPLEXES

Théorème 1 (Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs réelles. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Proposition 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. L'application qui à f continue sur $[a, b]$ associe $\int_a^b f$ est une forme linéaire positive.

Proposition 2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$ alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Proposition 3 (Relation de Chasles)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$. Soit $c \in]a, b[$. Alors f est continue sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs positives telles que $\int_a^b f = 0$. Alors $f = 0$.

Théorème 2 (de Riemann)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit f continue sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right)$

(ou $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right)$). Alors $(R_n(f))$ converge vers $\int_a^b f$.

I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

Théorème 3 (fondamental)

Soit a dans I et soit f continue sur I .

- (i) la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a ,
- (ii) f possède une primitive sur I ,
- (ii) pour toute primitive h de f sur I , pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a).$$

Proposition 5

Soit a dans I et soit f de classe \mathcal{C}^1 sur I . Alors, pour $x \in I$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Proposition 6 (Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs complexes. On suppose que f' est bornée sur I : i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t dans I , $|f'(t)| \leq M$. Alors f est M -lipschitzienne sur I , i.e. pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Proposition 7 (Intégration par parties)

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Pour tout (a, b) dans I^2

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Proposition 8 (Changement de variable)

Soit J un intervalle de \mathbb{R} , non vide et non réduit à un point. Soit f dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ avec $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tout (α, β) dans J^2

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Théorème 4 (Taylor avec reste intégral)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Théorème 5 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, F)$. Soit $x_0 \in I$.

Alors f possède un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x-x_0)^n) \quad [x \rightarrow x_0].$$