FONCTIONS USUELLES

1 Fonctions exponentielle, logarithmes et puissances.

1.1 Exponentielle et logarithme népérien.

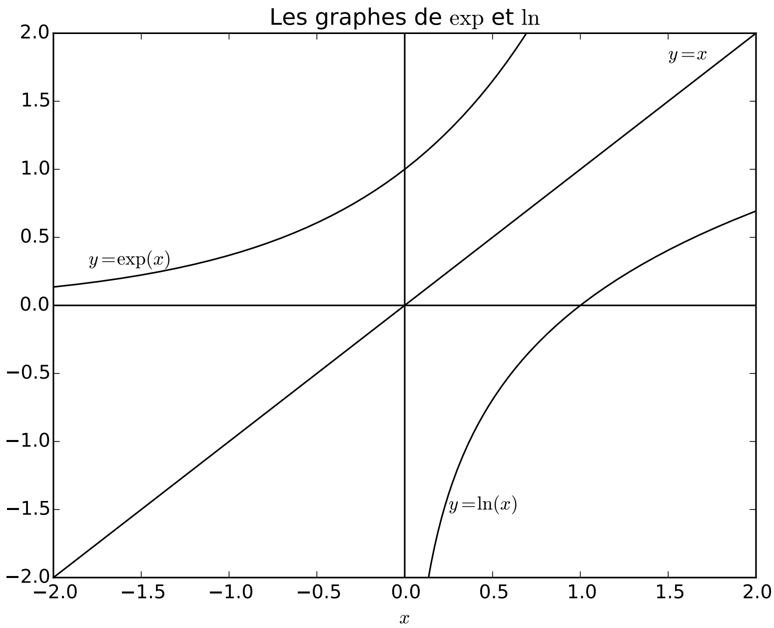
ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x) \qquad\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

ln et exp sont bijections réciproques l'une de l'autre : leurs graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



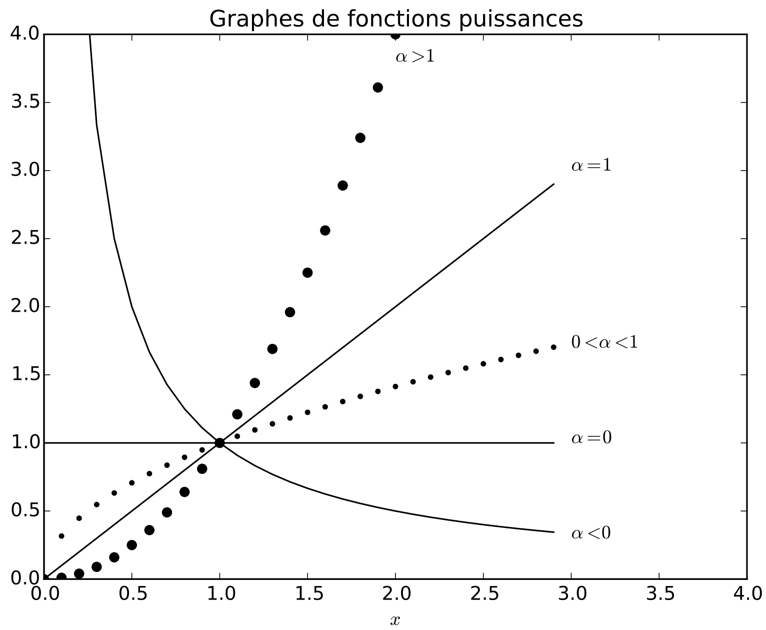
Inégalités à connaître : (étude de fonction ou convexité)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq 1 + x \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

1.2 Puissances.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(\alpha \ln x)$. On écrit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p_\alpha(x) = x^\alpha$ (c'est cohérent pour les puissances entières).

p_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.



$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad \text{et} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Pour $\alpha \geq 0$, p_α est prolongeable par continuité en 0. (En posant $p_0(0) = 1$ et pour $\alpha > 0$, $p_\alpha(0) = 0$.)
Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, on peut aussi définir p_α sur $\mathbb{R}_-^*$.

Si on note $e = \exp(1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x.$$

1.3 Logarithme décimal.

On note log (ou $\log_{10}$) la bijection réciproque de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, qui à x associe 10^x.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

1.4 Croissances comparées.

$$\begin{array}{lrcll}
\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & (\ln x)^\alpha & = & o(x^\beta) & [x \to +\infty] \\
\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & |\ln x|^\alpha & = & o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & [x \to 0^+] \\
\forall (a,\alpha) \in]1,+\infty[\times\mathbb{R} & x^\alpha & = & o(a^x) & [x \to +\infty] \\
\forall (a,\alpha) \in]0,1[\times\mathbb{R} & a^x & = & o(x^\alpha) & [x \to +\infty]
\end{array}$$

2 Fonctions hyperboliques.

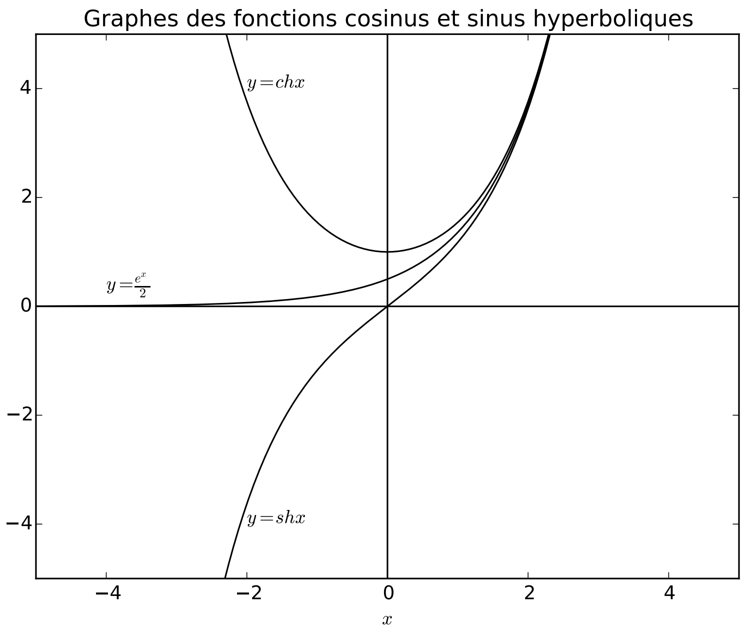
2.1 Définitions.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2.2 Propriétés.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x.$$

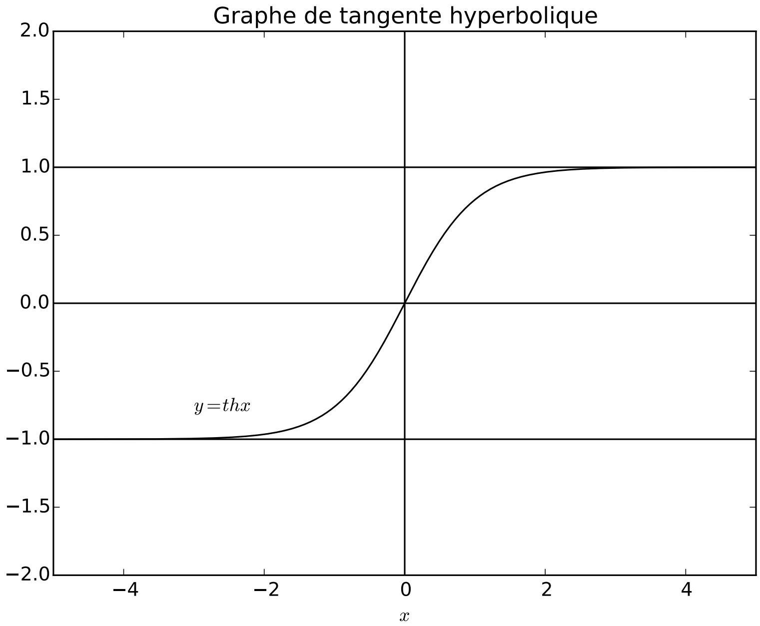
ch est paire. ch est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh} x$. ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
sh est impaire. sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch} x$. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2.3 Tangente hyperbolique.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

th est une fonction impaire. th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2$.
th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



3 Fonctions circulaires directes et réciproques.

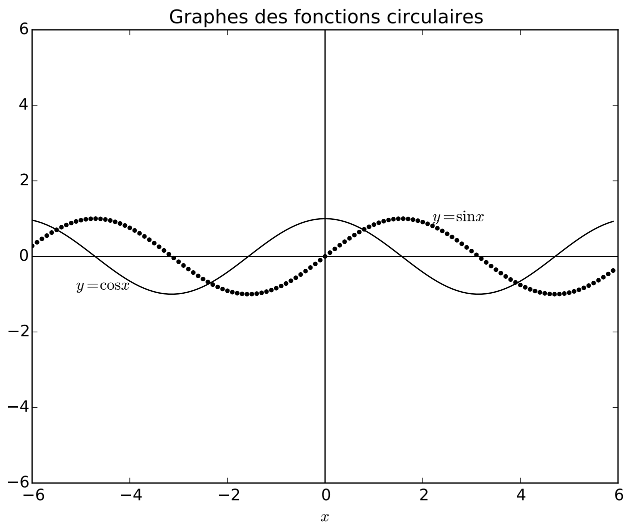
3.1 Cosinus et Sinus.

cos est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire. cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

sin est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$



$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \sin(x+\pi) = -\sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|.$$

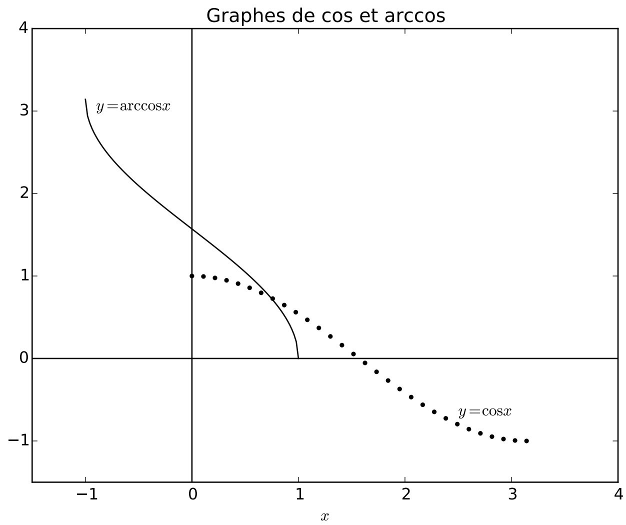
3.2 Arccosinus.

cos est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On appelle Arccosinus et on note Arccos sa bijection réciproque.

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos} x) = x.$$

Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



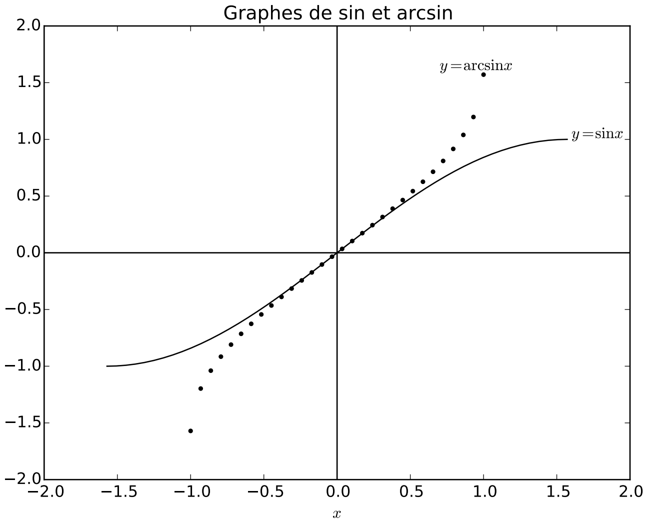
3.3 Arcsinus.

sin est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On appelle Arcsinus et on note Arcsin sa bijection réciproque.

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin} x) = x.$$

Arcsin est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et

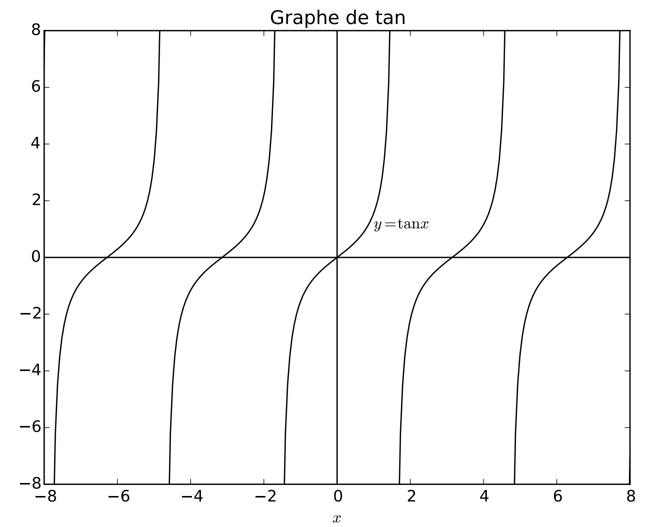
$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



3.4 Tangente et Arctangente.

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est π-périodique et impaire. tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

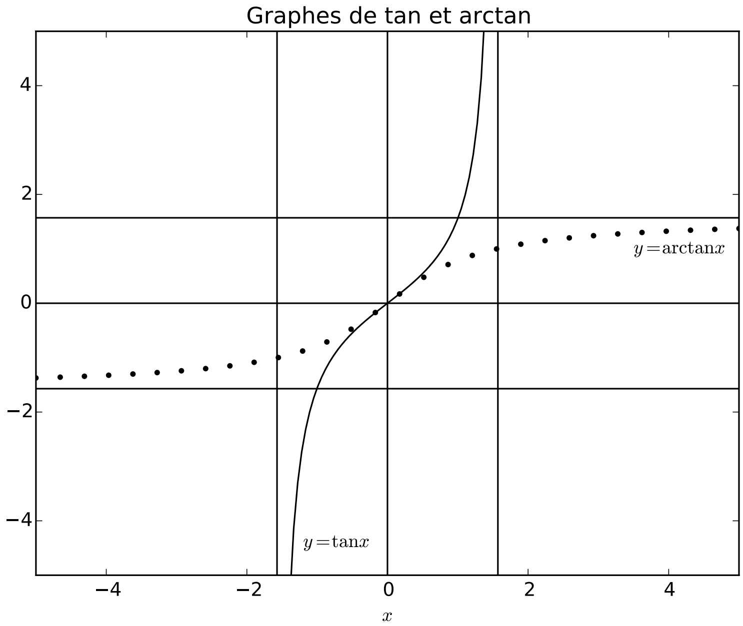


tan est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle Arctangente et on note Arctan sa bijection réciproque.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}(\tan x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan} x) = x.$$

Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$


Graphes de tan et arctan
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
x
$y = \arctan x$
$y = \tan x$