FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U)$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$.
Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0) donné par

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h,k)\|).$$

On peut aussi écrire

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + (\nabla f(x_0, y_0)|(h,k)) + o(\|(h,k)\|).$$

Proposition 2 (Règle de la chaîne)
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit x et y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, telles que pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in U$.
$t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Proposition 3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma : I \to U$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $t \in I$. On suppose γ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour $t \in I$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t)).$$

Proposition 4
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit φ et ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles telles que pour tout $(u, v) \in V$, $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in U$.
Alors $g : V \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et pour $(u, v) \in V$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)
\end{aligned}$$

Proposition 5
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. Soit $a \in U$. Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, ou encore, $\nabla f(a) = 0$.