ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Théorème 1 (de la base extraite)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Théorème 2 (de la base incomplète)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Théorème 3
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul, de dimension finie, admet (au moins) une base.

Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
Il y a équivalence entre les énoncés
(i) $\mathcal{F}$ est une base de E
(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E
(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

Proposition 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E : i.e. il existe G, sous-espace vectoriel de E, tel que

$$E = F \oplus G.$$

Proposition 3 (Formule de Grassmann)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Proposition 4
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre les énoncés
(i) f est un isomorphisme,
(ii) f transforme toute base de E en une base de F,
(iii) f transforme une base de E en une base de F.

Proposition 5
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que dim(E) =dim(F). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Il y a équivalence entre les énoncés

(i) f est un isomorphisme,
(ii) f est injective,
(iii) f est surjective.

Théorème 4 (Théorème du rang)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) Soit V un supplémentaire du noyau de f dans E. Alors V et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes.
(ii) Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini (i.e. $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie), et

$$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E.$$