# ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES

**Théorème 1** (**de la base extraite**)
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. De toute famille génératrice de $E$, on peut extraire une base de $E$.

**Théorème 2** (**de la base incomplète**)
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. Toute famille libre de $E$ peut être complétée en une base de $E$.

**Théorème 3**
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ non nul, de dimension finie, admet (au moins) une base.

**Proposition 1**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de $n$ vecteurs de $E$.
Il y a équivalence entre les énoncés
(i) $\mathcal{F}$ est une base de $E$
(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de $E$
(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $E$.

**Proposition 2** (**Dimension d'un produit d'espaces vectoriels**)
Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et

$$\dim\left(E_1 \times \cdots \times E_p\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(E_k).$$

**Proposition 3**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $F$ possède un supplémentaire dans $E$ : i.e. il existe $G$, sous-espace vectoriel de $E$, tel que

$$E = F \oplus G.$$

**Proposition 4** (**Formule de Grassmann**)
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

**Proposition 5**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F_1, \ldots F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$.

Alors $F_1 + \cdots + F_p$ est de dimension finie et $\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leq \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(F_k)$.

On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.

**Théorème 4**
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de $E$. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $F$. Il existe une unique application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

**Proposition 6**
Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de $E$. Il y a équivalence entre les énoncés
(i) $u$ est un isomorphisme,
(ii) $(u(e_i))_{i\in I}$ est une base de $F$.

**Proposition 7**
Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre les énoncés
(i) $f$ est un isomorphisme,
(ii) $f$ est injective,
(iii) $f$ est surjective.

**Proposition 8**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. $f$ est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite.

**Proposition 9** **(Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$)**
Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\times \dim(F)$.

**Proposition 10**
Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$, supplémentaires dans $E$. Pour $i = 1, \ldots, p$, soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour $i = 1, \ldots, n$, $u_{|E_i} = u_i$.

**Théorème 5** **(du rang)**
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
(i) Soit $V$ un supplémentaire du noyau de $f$ dans $E$. Alors $V$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes.
(ii) Si $E$ est de dimension finie, alors $f$ est de rang fini (i.e. $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie), et

$$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E.$$

**Proposition 11**
Soit $H$ un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Par définition, $H$ est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi$ sur $E$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
On a alors.
(i) Si $H$ est un hyperplan, toute droite $D$ de $E$ non contenue dans $H$ est un supplémentaire de $H$ dans $E$.
(ii) Réciproquement, si $H$ possède une droite comme supplémentaire, alors $H$ est un hyperplan.
(iii) Si $E$ est de dimension finie $n$, $H$ est un hyperplan de $E$ si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

**Proposition 12 (Intersection d'hyperplans)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.
(i) L'intersection de $m$ hyperplans est de dimension au moins $n - m$.
(ii) Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $n - m$ est l'intersection de $m$ hyperplans.

**Proposition 13**
Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $E$ passant par $a \in E$ et dirigé par le sous-espace vectoriel $F$ de $E$. Alors pour tout $a' \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a' + F$.

**Proposition 14 (Intersection de sous-espaces affines)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $E$ de directions respectives $F$ et $G$. Alors :
- soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est vide,
- soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

**Proposition 15**
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $a \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ d'inconnue $x$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $E$ de direction $\mathrm{Ker}(u)$.