DETERMINANTS

Théorème 1
Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, vérifiant les trois propriétés suivantes :
(i) f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable,
(ii) f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable,
(iii) $f(I_n) = 1$.

Proposition 1
(i) Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.
(ii) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 2 Opérations élémentaires et déterminant
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(i) Le déterminant de A reste inchangé si on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A.
(ii) Le déterminant de A est changé en son opposé si on échange deux colonnes de A.
(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Le déterminant de A est multiplié par α si on multiplie tous les coefficients d'une colonne par α.

Proposition 3 Déterminant d'une matrice triangulaire
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Le déterminant de A est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Proposition 4 Déterminant du produit de deux matrices
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Proposition 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(i) A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
(ii) Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Proposition 6 Déterminant de la transposée
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Proposition 7 Développements d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $A_{k,l}$ la matrice issue de A en ôtant la ligne k et la colonne l de A.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}(-1)^{k+l}\det(A_{k,l}).$$
(Développement du déterminant de A suivant la ligne k.)

2. Soit $l \in [\![1, n]\!]$,
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,l} (-1)^{k+l} \det(A_{k,l}).$$
(Développement du déterminant de A suivant la colonne l.)

Proposition 8 Caractérisation des bases
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. On a alors
$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

Proposition 9
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Les matrices de f dans une base quelconque de E ont toutes le même déterminant.

Proposition 10
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
(i) $\det(Id_E) = 1$.
(ii) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
(iii) Pour tous f et g dans $\mathcal{L}(E)$, $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$.
(iv) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$.
(v) Pour tout $f \in \mathcal{GL}(E)$, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Il s'agit maintenant de compléments de spé.

Proposition 11
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, où $p + q = n$. Alors
$$\det(M) = \det(A)\det(C).$$

Proposition 12 Déterminant de Vandermonde
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$