DERIVATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS REELLES OU COMPLEXES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Proposition 1
Toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

Proposition 2
Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs réelles. Soit a un point de I. Alors le graphe de f possède une tangente en $(a, f(a))$ d'équation cartésienne :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Proposition 3
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

(ii) fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(iii) On suppose de plus que g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition 4
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dérivable sur I. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $\varphi \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, dérivable sur J telle que $\varphi(J) \subset I$.
Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et

$$(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi).\varphi'.$$

Proposition 5
Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I. Alors $\exp \circ \varphi$ est dérivable sur I et

$$(\exp \circ \varphi)' = \varphi' \exp \circ \varphi.$$

Proposition 6
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement monotone sur I, dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur J, f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ (f^{-1})}.$$

Proposition 7 (**Formule de Leibniz**)
Soient f et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Proposition 8
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a à l'intérieur de I.
Si f admet un extremum local en a et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème 1 (**de Rolle**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$.

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad f'(c) = 0.$$

Théorème 2 (**des accroissements finis**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$.

$$\exists c \in]a, b[\qquad \text{tel que} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Théorème 3 (**Inégalité des accroissements finis**)
Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs réelles. On suppose que f' est bornée sur I : i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout t dans I, $|f'(t)| \leq M$. Alors f est M-lipschitzienne sur I, i.e. pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Théorème 4 (**de la limite de la dérivée**)
Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs réelles. On suppose que f' tend vers l (fini ou infini) en a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l lorsque x tend vers a.
Si l est fini, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.
Si l est infini, f n'est pas dérivable en a et le graphe de f présente une tangente verticale au point $(a, f(a))$.

Théorème 5 (**de classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement**)
Soit $a \in I$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que pour $i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie α_i lorsque x tend vers a.
Alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Ce prolongement est unique et si on le note $\tilde{f}$, il vérifie, pour $i \in [\![0, n]\!]$, $\tilde{f}^{(i)}(a) = \alpha_i$.