# DERIVATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS REELLES OU COMPLEXES

Dans tout le chapitre, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

**Proposition 1**
Toute fonction dérivable sur $I$ est continue sur $I$.

**Proposition 2**
Soit $f$ une fonction dérivable sur $I$ à valeurs réelles. Soit $a$ un point de $I$. Alors le graphe de $f$ possède une tangente en $(a, f(a))$ d'équation cartésienne :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

**Proposition 3**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur $I$ et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

(ii) $fg$ est dérivable sur $I$ et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(iii) On suppose de plus que $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

**Proposition 4**
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dérivable sur $I$. Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $\varphi \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, dérivable sur $J$ telle que $\varphi(J) \subset I$.
Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur $J$ et

$$(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi).\varphi'.$$

**Proposition 5**
Soit $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur $I$. Alors $\exp \circ \varphi$ est dérivable sur $I$ et

$$(\exp \circ \varphi)' = \varphi' \exp \circ \varphi.$$

**Proposition 6**
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $f$ est strictement monotone sur $I$, dérivable sur $I$ et que $f'$ ne s'annule pas sur $I$. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f$ est bijective de $I$ sur $J$, $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ (f^{-1})}.$$

**Proposition 7 (Formule de Leibniz)**
Soient $f$ et $g$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Alors $fg$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

**Proposition 8**
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a$ à l'intérieur de $I$.
Si $f$ admet un extremum local en $a$ et si $f$ est dérivable en $a$, alors $f'(a) = 0$.

**Théorème 1 (de Rolle)**
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$.

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in ]a, b[ \quad \text{tel que} \quad f'(c) = 0.$$

**Théorème 2 (des accroissements finis)**
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et dérivable sur $]a, b[$.

$$\exists c \in ]a, b[ \qquad \text{tel que} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

**Théorème 3 (Inégalité des accroissements finis)**
Soit $f$ une fonction dérivable sur $I$ à valeurs réelles. On suppose que $f'$ est bornée sur $I$ : i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t$ dans $I$, $|f'(t)| \leq M$. Alors $f$ est $M$-lipschitzienne sur $I$, i.e. pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

**Théorème 4 (Théorème de la limite de la dérivée)**
Soit $a \in I$. Soit $f$ une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs réelles. On suppose que $f'$ tend vers $l$ (fini ou infini) en $a$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $a$.
Si $l$ est fini, $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = l$.
Si $l$ est infini, $f$ n'est pas dérivable en $a$ et le graphe de $f$ présente une tangente verticale au point $(a, f(a))$.