ENTIERS NATURELS ET DENOMBREMENT

Théorème 1 Division euclidienne
Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tel que
$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$
On dit que q (resp r) est le quotient (resp le reste) de la division euclidienne de a par b.

Proposition 1
Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. On note (q, r) le couple quotient reste de la division euclidienne de a par b.
$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r).$$

Théorème 2
Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de manière unique (à l'ordre près) en un produit de facteurs premiers.

Proposition 2
Soient E et F deux ensembles finis, de même cardinal. Soit f une application de E vers F. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) f est bijective,
(ii) f est injective,
(iii) f est surjective.

Proposition 3
Soient E et F deux ensembles finis.
$$\begin{array}{rl} (i) & \text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F) \\ (ii) & \text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F). \end{array}$$

Proposition 4
Soit E un ensemble fini. Pour toute partie A de E, $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

Proposition 5
Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et
$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

Proposition 6
Soit E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et
$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

Proposition 7
Soient p et n deux entiers naturels.
Le nombre de p listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n est noté A_n^p. On a
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{si} \quad p \leq n, \qquad 0 \quad \text{sinon.}$$
C'est aussi le nombre d'application injective d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$.
Le nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n est noté $\binom{n}{p}$. On a
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{si} \quad p \leq n, \qquad 0 \quad \text{sinon.}$$

Proposition 8
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$