LIMITES ET CONTINUITE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS REELLES OU COMPLEXES

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Proposition 1
Toute fonction admettant une limite dans $\mathbb{K}$ en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est bornée dans $\mathbb{K}$ au voisinage de a.

Proposition 2
Soient f et g dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soient b et c dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que f tend vers b en a et que g tend vers c en a.
(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ tend vers $\lambda b + \mu c$ en a.
(ii) fg tend vers bc en a.
(iii) On suppose de plus que $c \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\frac{f}{g}$ tend vers $\frac{b}{c}$ en a.

Proposition 3 (**Caractérisation séquentielle de la limite**)
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $b \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) la fonction f a pour limite b en a,
(ii) pour toute suite (a_n) d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(a_n))$ converge vers b.

Proposition 4 (**Composition**)
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{K})$ telle que $f(I) \subset J$. Soit $b \in \overline{J} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $c \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si f tend vers b dans $\mathbb{R}$ en a et si g tend vers c dans $\mathbb{K}$ en b, alors $g \circ f$ tend vers c dans $\mathbb{K}$ en a.

Proposition 5 (**Passage à la limite dans les inégalités**)
Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$
S'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et **si** f, g et h **convergent** vers λ, μ et ν respectivement dans $\mathbb{R}$ en a, alors
$$\lambda \leq \mu \leq \nu.$$

Théorème 1 (**d'encadrement**)
Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose qu'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si f et h convergent vers λ dans $\mathbb{R}$ en a, alors g converge vers λ en a.

Théorème 2 (**de minoration**)
Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose qu'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x)$. Si f diverge vers $+\infty$ en a, alors g diverge vers $+\infty$ en a.

Théorème 3 (**de majoration**)
Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose qu'il existe un voisinage de a dans I sur lequel $f(x) \leq g(x)$. Si g diverge vers $-\infty$ en a, alors f diverge vers $-\infty$ en a.

Théorème 4 (**de la limite monotone**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a, b[, \mathbb{R})$, croissante et majorée sur $[a, b[$, alors f converge en b^- dans $\mathbb{R}$ et sa limite est la borne supérieure de ses valeurs.
Si f est croissante non majorée alors f diverge vers $+\infty$ en b^-.

Proposition 6 (**Caractérisation séquentielle de la continuité**)
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) f est continue en a.
(ii) Pour toute suite $(a_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a dans $\mathbb{R}$, $(f(a_n))$ tend vers $f(a)$ dans $\mathbb{K}$.

Proposition 7
(i) Toute combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I.
(ii) Tout produit de fonctions continues sur I est continue sur I.
(iii) Le quotient de deux fonctions continues sur I, dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, est continue sur I.
(iv) Si f est continue sur I et à valeurs dans J un intervalle de $\mathbb{R}$ et si g est continue sur J, alors la composée $g \circ f$ est une application continue sur I.

Théorème 5 (**des croissances comparées**)

$$\begin{array}{lrcll}
\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & (\ln x)^\alpha & = & o(x^\beta) & [x \to +\infty] \\
\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & |\ln x|^\alpha & = & o\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & [x \to 0^+] \\
\forall(a, \alpha) \in]1, +\infty[\times \mathbb{R} & x^\alpha & = & o(a^x) & [x \to +\infty] \\
\forall(a, \alpha) \in]0, 1[\times \mathbb{R} & a^x & = & o(x^\alpha) & [x \to +\infty]
\end{array}$$

Théorème 6 (**des valeurs intermédiaires**)
L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.
Autre version : soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient c et d dans $f(I)$, avec $c < d$, alors

$$\forall \gamma \in]c, d[\qquad \exists \delta \in I, \quad f(\delta) = \gamma.$$

Théorème 7
L'image d'un segment par une application continue à valeurs réelles est un segment.
Autre version : une application à valeurs réelles, continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 8
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\tilde{f} : I \to f(I)$, $x \mapsto f(x)$. On suppose que f est continue et strictement monotone. Alors
(i) $f(I)$ est un intervalle,
(ii) $\tilde{f}$ est bijective,
(iii) $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone, de même monotonie que f,
(iv) $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.