NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

Proposition 1 (**Inégalités triangulaires**)
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Proposition 2 (**Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire**)
Soient z et z' dans $\mathbb{C}$.

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff (z = 0 \quad \text{ou} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\ z' = \alpha z).$$

Formulaire 1 (**Formules d'Euler**)
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Formulaire 2 (**Formule de Moivre**)
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Formulaire 3
Soient a et b dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
\\
\cos(2a) &= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a \\
\sin(2a) &= 2 \sin a \cos a \\
\\
\cos a \cos b &= \left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)/2 \\
\sin a \sin b &= \left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)/2 \\
\cos a \sin b &= \left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)/2
\end{aligned}$$

Formulaire 4
Soient a et b dans $I = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}
\text{si } a+b \in I, \quad \tan(a+b) &= \tfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\
\text{si } a-b \in I, \quad \tan(a-b) &= \tfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

Formulaire 5
Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, si $t = \tan \frac{\theta}{2}$,

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Proposition 3 (**Somme et produit des racines d'une équation du second degré**)
Soient a, b et c dans $\mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe δ dans $\mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux racines dans $\mathbb{C}$. On les note r_1 et r_2 (éventuellement elles sont confondues). On a alors (à l'ordre près)

$$r_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

et

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Proposition 4 (**Racines n-ièmes de l'unité**)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, i.e. l'ensemble des nombres complexes $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. On a

$$\mathbb{U}_n = \{e^{ik\frac{2\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Proposition 5 (**Interprétation géométrique des racines n-ièmes de l'unité**)
Les images dans le plan complexe des racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle unité.

Proposition 6 (**Nombres complexes et géométrie plane**)
Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d.

(i) A, B et C sont alignés si et seulement si ($a = b$ ou $\frac{c-a}{b-a}$ est réel).

(ii) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si ($a = b$ ou $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur).

Proposition 7 (**Similitudes directes**)
Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et F la similitude du plan représentée par $z \mapsto az + b$.

(i) Si $a = 1$, alors l'application F est la translation de vecteur d'affixe b.

(ii) Si $a \neq 1$, alors l'application F admet un unique point invariant Ω, appelé centre de la similitude. En désignant par α un argument de a, l'application F s'écrit alors $F = H \circ R = R \circ H$, avec
- R la rotation de centre Ω et d'angle α,
- H l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

Le réel $|a|$ est appelé rapport de la similitude et α une mesure de l'angle de la similitude.