

CALCULS ALGÈBRIQUES

Proposition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Proposition 2

Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $x \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Proposition 3

Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Cette formule se généralise pour deux éléments qui commutent dans un anneau.

Proposition 4 (Triangle de Pascal)

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $p \leq n$.

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Proposition 5 (Formule du binôme)

Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Cette formule se généralise pour deux éléments qui commutent dans un anneau.