CALCUL MATRICIEL

Proposition 1 (Formule du binôme)
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = BA$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Théorème 1 (Algorithme du pivot de Gauss-Jordan)
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.
Plus précisément, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice E (carrée de taille n) produit de matrices de transvection, de matrices de dilatation et de matrices de permutation, et une unique matrice R (de taille (n, p)) échelonnée réduite par lignes telles que $A = ER$.

Proposition 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) A est inversible,
(ii) $A \underset{L}{\sim} I_n$,
(iii) le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle,
(iv) pour tout B, le système $AX = B$ admet une unique solution,
(v) pour tout B, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Proposition 3
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. On note A la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, X celle de x dans $\mathcal{B}$ et Y celle de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$. On a alors

$$Y = AX.$$

Proposition 4 (Changement de base pour un vecteur)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (i.e. les colonnes de P sont les matrices représentatives des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$, c'est aussi la matrice représentative de l'identité dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$). Soit $x \in E$. On note X la matrice représentative de x dans $\mathcal{B}$ et X' celle de x dans $\mathcal{B}'$. Alors

$$X = PX'.$$

Proposition 5 (Changement de bases pour une application linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q celle de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note A la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et A' celle de f dans $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Proposition 6 (Changement de base pour un endomorphisme)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ et A' celle de f dans $\mathcal{B}'$. Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

Théorème 2 (Théorème du rang, version matricielle)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = n.$$

Proposition 7
Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.