SERIES A VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME DE DIMENSION FINIE

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

Proposition 1
Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E. Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0_E$.

Proposition 2 (**Transformation suite-série**)
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

$$(u_n) \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}$$

Proposition 3
L'ensemble des suites (u_n) d'éléments de E telles que $\sum u_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $(E^{\mathbb{N}}, +, .)$.

Proposition 4 (**Linéarité de la somme**)
L'application qui à une suite (u_n) d'éléments de E telle que $\sum u_n$ converge , associe la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire.

Proposition 5
Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$.

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \text{ la série numérique } \sum u_{n,i} \text{ converge.}$$

Théorème 1
Toute série absolument convergente sur E, $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, est convergente.

Proposition 6
On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre $\|.\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$.
Alors $\sum A^n$ converge, $I_p - A$ est inversible et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$.

Proposition 7
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. $\sum \frac{1}{n!} A^n$ converge. Sa somme est appelée exponentielle de A et notée $\exp(A)$.