# SERIES NUMERIQUES

**Proposition 1** (**Règle de d'Alembert**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.
On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite $l$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors,

1. si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
2. si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

**Proposition 2** (**Sommation des relations de comparaison**)
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang) convergente.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

**Proposition 3** (**Sommation des relations de comparaison**)
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs (ou de signe constant à partir d'un certain rang) divergente.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

**Théorème 1** (**Comparaison série-intégrale**)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et décroissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. $\sum w_n$ converge.
2. $\sum f(n)$ converge si et seulement si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Si $\sum f(n)$ converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - \int_0^{+\infty} f.$$