SUITES ET SERIES DE FONCTIONS VECTORIELLES

$(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 1 (**Continuité de la limite d'une suite de fonctions**)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $A \subset E$ à valeurs dans F.
On suppose que (f_n) converge uniformément au voisinage de tout point de A, alors (f_n) converge simplement sur A et si on note f sa limite simple, f est continue sur A.

Théorème 2 (**de la double limite**)
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $A \subset E$ à valeurs dans F. Soit a un point adhérent à A.
On suppose que (f_n) converge uniformément sur A et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \underset{a}{\rightarrow} l_n$ $(l_n \in F)$.
Alors (f_n) converge simplement sur A, on note f sa limite simple ; (l_n) converge dans F et si on note l sa limite, $f \underset{a}{\rightarrow} l$ i.e.

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Le résultat est encore valable si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré et $a = +\infty$ ou si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minoré et $a = -\infty$.

Proposition 1
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Soit $a \in I$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I. Alors (f_n) converge simplement sur I. On note $f : I \mapsto F$ sa limite simple.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose $G_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ ($f$est continue sur I).
Alors (G_n) converge uniformément vers G sur tout segment de I.

Théorème 3 (**Intégration de la limite d'une suite de fonctions**)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F.
On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$. Alors (f_n) converge simplement sur $[a, b]$, on note f sa limite simple. f est continue sur $[a, b]$. On a alors
$(\int\limits_a^b f_n)$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^b f_n = \int\limits_a^b f$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)dx$.

Théorème 4 (**Dérivation de la limite d'une suite de fonctions**)
Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. On suppose que (f_n) converge simplement sur I vers f et que (f_n') converge uniformément sur tout segment de I.
Alors (f_n') converge simplement sur I. On note g sa limite simple. (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$ i.e.

$$(\lim_{n \to +\infty} f_n)'(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

Théorème 5 (**Dérivation version $\mathcal{C}^k$**)
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. On suppose que pour tout $l \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(l)})$ converge simplement sur I et que $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I. On note f la limite simple de (f_n) sur I.
Alors pour tout $l \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(l)})$ converge uniformément sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $l \in [\![1, k]\!]$, pour tout x dans I, $f^{(l)}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n^{(l)}(x)$.

Théorème 6 (**Continuité de la somme d'une série de fonctions**)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur $A \subset E$ à valeurs dans F.
On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de tout point de A, alors $\sum f_n$ converge simplement sur A et sa somme est continue sur A.

Théorème 7 (**Intégration de la somme d'une série de fonctions**)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F.
On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
Alors $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ et sa somme S est continue sur $[a,b]$. On a de plus $\sum \int\limits_a^b f_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^b f_n = \int\limits_a^b S$ i.e. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$.

Théorème 8 (**Dérivation de la somme d'une série de fonctions**)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.
Alors $\sum f_n'$ converge simplement sur I, on note T sa somme ; si on note S la somme de la série de fonctions $\sum f_n$, $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout x dans I, $S'(x) = T(x)$ i.e. $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Théorème 9 (**Dérivation version $\mathcal{C}^k$**)
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. On suppose que pour tout $l \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(l)}$ converge simplement sur I et que $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I. On note S la somme de $\sum f_n$.
Alors pour tout $l \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(l)}$ converge uniformément sur tout segment de I, S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $l \in [\![1, k]\!]$, pour tout x dans I, $S^{(l)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(l)}(x)$.

Théorème 10 (**Interversion des limites pour une série de fonctions**)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $A \subset E$ à valeurs dans F. Soit a un point adhérent à A.
On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur A et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \underset{a}{\to} l_n$ ($l_n \in F$).
Alors $\sum f_n$ converge simplement sur I, on note S sa somme ; $\sum l_n$ converge et si on note l sa somme, $S \underset{a}{\to} l$ i.e. $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.
Le résultat est encore valable si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré et $a = +\infty$ ou si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minoré et $a = -\infty$.