ESPACES PROBABILISES

Proposition 1
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
(ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \setminus B \in \mathcal{A}$
(iii) $\forall (A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A}^n$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$,
(iv) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Proposition 2
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
Plus généralement, pour $A_1, \ldots, A_n$, n événements deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.
(iii) Pour tout système complet d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.
(iv) Pour tout événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
(v) Pour A et B deux événements, $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Théorème 1 (**Continuité monotone**)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
(i) Continuité croissante
Soit (A_n) une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $A_n \subset A_{n+1}$. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

(ii) Continuité décroissante
Soit (A_n) une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $A_{n+1} \subset A_n$. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Remarques

1. Soit (A_n) une suite d'événements. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$. (B_n) est une suite croissante d'événements et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. On a alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right).$$

2. Soit (A_n) une suite d'événements. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$. (B_n) est une suite décroissante d'événements et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$. On a alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Proposition 3 (**Sous-additivité**)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit (A_n) une suite d'événements, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Proposition 4
Une réunion (resp intersection) au plus dénombrable d'événements négligeables (resp presque sûrs) est négligeable (resp presque sûr) .

Proposition 5
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement de probabilité non nulle.
L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Théorème 2 (**Formule des probabilités composées**)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) est une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \cdots \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}(A_1).$$

Théorème 3 (**Formule des probabilités totales**)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.
Soit B un événement. Alors $\sum \mathbb{P}(B \cap A_n)$ converge et (avec la convention $\mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n) = 0$ si $\mathbb{P}(A_n) = 0$)
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n).$$

Théorème 4 (**Formule de Bayes**)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.
Soit B un événement de probabilité non nulle. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)}.$$

Proposition 6
Soient A et B deux événements.
Si $\mathbb{P}(B) = 0$, A et B sont indépendants.
Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$.

Proposition 7
Soient A et B deux événements indépendants. Alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Proposition 8
Soit (A_n)une suite d'événements mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n$ ou $B_n = \overline{A_n}$. Alors (B_n) est aussi une famille d'événements mutuellement indépendants.

Proposition 9
Soit Ω un ensemble. Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrètes sur Ω. Son support est au plus dénombrable.

Théorème 5
Soit Ω un ensemble au plus dénombrable. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$. Alors $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrètes sur Ω et P est la probabilité associée à cette distribution de probabilités discrètes sur Ω.