FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE A VALEURS VECTORIELLES

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{F}(I,E)$. Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité d'ordre 1 en a.
Si f est dérivable en a, alors f possède un développement limité en a d'ordre 1 qui est donné par $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$.

Proposition 2 (**Linéarité**)
$\mathcal{D}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$ et l'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I,E)$ dans $\mathcal{F}(I,E)$.

Proposition 3 (**Composition par une application linéaire**)
Soit $f \in \mathcal{D}(I,E)$. Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$ où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $L \circ f \in \mathcal{D}(I,F)$ et $(L \circ f)' = L \circ (f')$.

Proposition 4
Soient f et g dans $\mathcal{D}(I,E)$ et $\mathcal{D}(I,F)$. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G (F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie). Alors $B(f,g)$ est dans $\mathcal{D}(I,G)$ et $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$.

Corollaire
On suppose que E est un espace euclidien.
Soient f et g dérivables sur I et à valeurs dans E. Alors $(f|g)$ est dérivable sur I et à valeurs réelles et $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$.
Si f est dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I, alors $\|f\|_2$ est dérivable sur I et $\|f\|_2' = \frac{(f'|f)}{\|f\|_2}$.

Proposition 5
Soit $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathcal{D}(I,F_i)$ où chaque F_i est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $M : F_1 \times \cdots \times F_p \to G$ multilinéaire (avec G $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie).
Alors $M(f_1,\dots,f_p) \in \mathcal{D}(I,G)$ et

$$M(f_1,\dots,f_p)' = \sum_{i=1}^{p} M(f_1,\dots,f_{i-1},f_i',f_{i+1},\dots,f_p).$$

Corollaire
(i) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathcal{D}(I,\mathbb{K}^p))^p$. $\det_{\mathcal{B}}(f_1,\dots,f_p) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ et

$$\det{}_{\mathcal{B}}(f_1,\dots,f_p)' = \sum_{i=1}^{p} \det{}_{\mathcal{B}}(f_1,\dots,f_{i-1},f_i',f_{i+1},,\dots,f_p).$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{D}(I,\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. On note $A = (C_1 \cdots C_n)$. Alors $\det(A) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ et

$$\det(A)' = \sum_{j=1}^{n} \det(C_1 \cdots C_{i-1} C_i' C_{i+1} \cdots C_n).$$

Proposition 6 (**Composition**)
Soit $f \in \mathcal{D}(I, E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ avec $\varphi(J) \subset I$. Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(J, E)$ et $(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$.

Proposition 7 (**Caractérisation à l'aide d'une base de** E)
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On note $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des applications coordonnées (ou composantes) de f relatives à la base $\mathcal{B}$.
Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est dérivable en a et si f est dérivable en a,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i.$$

f est dérivable sur I si et seulement si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est dérivable sur I et si f est dérivable sur I,

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x) e_i.$$

Application (**caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur** I **et dérivables sur l'intérieur de** I)
Soit $f \in \mathcal{C}(I, E) \cap \mathcal{D}(\mathring{I}, E)$. f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathring{I}$, $f'(x) = 0$.

Proposition 8 (**Linéarité**)
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
$\mathcal{C}^n(I, E)$ est un espace vectoriel.
$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^n(I, E)$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

Proposition 9 (**Composition par une application linéaire**)
Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $L \circ f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(L \circ f)^{(k)} = L \circ (f^{(k)})$.

Proposition 10 (**Formule de Leibniz**)
Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soient f et g dans $\mathcal{C}^n(I, E)$ et $\mathcal{C}^n(I, F)$ (avec F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie). Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G (G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie). Alors $B(f, g)$ est dans $\mathcal{C}^n(I, G)$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} B\left(f^{(r)}, g^{(k-r)}\right).$$

Proposition 11 (**Composition**)
Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(J)$ avec $\varphi(J) \subset I$. Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(J, E)$ et $(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$.

Proposition 12
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], E)$. On note $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des applications coordonnées (ou composantes) de f relatives à la base $\mathcal{B}$.
f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si ses applications coordonnées f_i le sont.

Proposition 13
$\mathcal{CM}([a, b], E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 14 (**Linéarité**)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a,b],E) & \to & E \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

Proposition 15 (**Relation de Chasles**)
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. Soit $c \in]a,b[$.
Alors $f \in \mathcal{CM}([a,c],E)$ et $f \in \mathcal{CM}([c,b],E)$ et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Proposition 16
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$ où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $L(f) \in \mathcal{CM}([a,b],F)$ et

$$\int_a^b L(f) = L\left(\int_a^b f\right).$$

Théorème 1 (**Sommes de Riemann**)
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$. Alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f.$$

Proposition 17
Soit $\|.\|$ une norme sur F. Soit $f \in \mathcal{CM}(I,E)$. $\forall (a,b) \in I^2$ $\|\int_a^b f\| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \|f\|$.

Proposition 18
Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$. Soient g et h deux primitives de f sur I. Alors il existe $k \in E$ tel que $h = g + k$, i.e. $\forall x \in I$, $h(x) = g(x) + k$.

Théorème 2 (**fondamental**)
Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$. Soit $a \in I$.
(i) $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Pour toute primitive h de f sur I,

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a).$$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$, $\forall x \in I$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

Proposition 19 (**Intégration par parties**)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$. Soit $g \in \mathcal{C}^1(I,E)$. $\forall (a,b) \in I^2$

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'.$$

Proposition 20 (**Changement de variable**)
Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ avec $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))du.$$

Proposition 21 (**(Inégalité des accroissements finis**)
Soit $\|.\|$ une norme sur E. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],E)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in]a,b[$, $\|f'(t)\| \leq \lambda$. Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda(b-a).$$

Proposition 22
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],E)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$.
Supposons que f' possède une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Proposition 23 (**Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^k$**)
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],E)$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a,b]$.
Supposons que pour $l \in \{1,\dots,k\}$, $f^{(l)}$ possède une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$.

Théorème 3 (**Taylor avec reste intégral**)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,E)$. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Théorème 4 (**Inégalité de Taylor-Lagrange**)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,E)$. Soit $a \in I$. Soit $x \in I$. On pose $M_{n+1}(x) = \sup\limits_{t \in [a,x]} \|f^{(n+1)}(t)\|$. Alors

$$\|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x).$$

Proposition 24 (**Développement limité d'une primitive d'une fonction continue**)
Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$. Soit $x_0 \in I$. Si f possède un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \cdots + (x-x_0)^n a_n + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad [x \to x_0]$$

et si g est une primitive de f sur I, alors g possède un $DL_{n+1}(x_0)$ donné par :

$$g(x) = g(x_0) + (x-x_0)a_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2}a_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}a_n + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \qquad [x \to x_0]$$

Proposition 25 (**Développement limité de la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$**)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$. Soit $x_0 \in I$. Supposons que f' possède un $DL_n(x_0)$ alors f a un $DL_{n+1}(x_0)$. Plus précisément, si

$$f'(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \cdots + (x-x_0)^n a_n + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad [x \to x_0]$$

alors

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)a_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2}a_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}a_n + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \qquad [x \to x_0]$$

Théorème 5 (**Formule de Taylor-Young**)
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,E)$. Soit $x_0 \in I$.
Alors f possède un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad [x \to x_0].$$