ESPACES PREHILBERTIENS REELS, ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Proposition 1
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E, F de dimension finie, n.

(i) $E = F \oplus F^{\perp}$.

(ii) On note p le projecteur orthogonal sur F. Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$,

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i.$$

Proposition 2 Distance à un sous espace vectoriel de dimension finie
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E, F de dimension finie. On note p le projecteur orthogonal sur F.
Soit x dans E. $y \mapsto \|x - y\|$ admet un minimum global sur F atteint uniquement en $p(x)$.

Proposition 3 Inégalité de Bessel
Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille orthonormée de E, $(E, (.|.))$ étant un espace préhilbertien réel. Alors pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2 \leq \|x\|^2.$$

Proposition 4
Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale de E, $(E, (.|.))$ étant un espace préhilbertien réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$. Alors pour $x \in E$, $(p_n(x))$ converge vers x.

Proposition 5 (Egalité de Parseval-Bessel)
Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale de E, $(E, (.|.))$ étant un espace préhilbertien réel. Soit $x \in E$. $\sum(e_k|x)^2$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(e_k|x)^2 = \|x\|^2$.

Dorénavant, E désigne un espace euclidien.

Proposition 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :

(i) $f \in \mathcal{S}(E)$

(ii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ soit symétrique

(iii) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

Proposition 7

Soit p un projecteur de E. p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.

Proposition 8
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $V^\perp$ est stable par u et les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$ sont symétriques.

Proposition 9
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u, alors $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Théorème 1 Théorème spectral
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f un endomorphisme symétrique de E.
Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

Théorème 2 Théorème spectral, version matricielle
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\ D\ {}^tP$.

Proposition 10
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) $f \in \mathcal{O}(E)$, i.e. $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$
(ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$

Proposition 11
$\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. Muni de la loi induite, c'est un groupe, appelé groupe orthogonal de E.

Proposition 12
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) $f \in \mathcal{O}(E)$, i.e. $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$
(ii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormée
(iii) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

Proposition 13
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$.

$$f \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 14
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.
Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $V^\perp$ est stable par f et les endomorphismes induits par f sur V et $V^\perp$ sont orthogonaux.

Proposition 15
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Théorème 3
Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice représentative de f dans cette base soit diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux :

- des blocs de tailles 1 de la forme (ε), avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,
- des blocs de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Proposition 16
Soit $f \in SO(E)$ avec E de dimension 3. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proposition 17
Soit $f \in SO(E)$ avec E de dimension 3.

- Il existe une droite D, stable par f et telle que $f_D = Id_D$,
- soit P le plan orthogonal à D, P est stable par f et f_P est une rotation plane.