ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Soit E un espace euclidien.

Proposition 1
Soit φ une forme linéaire sur E. Il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (a|x).$$

Proposition 2 - Définition
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme v de E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (v(x)|y) = (x|u(y)).$$

v est appelé l'<u>adjoint</u> de u et noté u^*.

Proposition 3
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)^T.$$

Proposition 4
(i) $\theta : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.
(ii) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Proposition 5
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
(i) $\chi_{u^*} = \chi_u$.
(ii) $\mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u)$.
(iii) $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$, $\mathrm{tr}(u^*) = \mathrm{tr}(u)$, $\det(u^*) = \det(u)$.

Proposition 6
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp.$$

Proposition 7
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Proposition 8
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) A est orthogonale
(ii) $A^T A = I_n$
(iii) la famille des colonnes de A forme une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
(iv) la famille des lignes de A forme une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Proposition 9
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
A est orthogonale si et seulement si A est une matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un espace euclidien de dimension n.

Proposition 10
$(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, appelé groupe orthogonal.

Proposition 11
$\forall A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Proposition 12
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Proposition 13
Soit E un espace euclidien orienté. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Proposition 14
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Soit $\mathcal{B}'$ une base de E.
$\mathcal{B}'$ est une base orthonormée directe de E si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale directe.

Proposition 15
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés.
(i) u est autoadjoint
(ii) il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E dans laquelle la matrice représentative de u est symétrique.
(iii) pour toute base orthonormée de E, la matrice représentative de u, dans cette base, est symétrique.

Proposition 16
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Proposition 17
Soit p un projecteur de E. p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint.

Proposition 18
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u et les endomorphismes induits par u sur F et $F^{\perp}$ sont autoadjoints.

Proposition 19
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u, alors $E_{\lambda}(u)$ et $E_{\mu}(u)$ sont orthogonaux.

Théorème 1 Théorème spectral
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) u est un endomorphisme autoadjoint de E
(ii) E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u
(ii) il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème 2 Théorème spectral
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre les énoncés
(i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
(ii) A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale
(iii) il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\ D\ {}^tP$.

Proposition 20
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. $\quad u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \quad$ et $\quad u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 21
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $\quad A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \quad$ et $\quad A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 22
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une isométrie vectorielle si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$

Proposition 23
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) $f \in \mathrm{O}(E)$
(ii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormée
(iii) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

Proposition 24
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$.

$$f \in \mathrm{O}(E) \iff A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 25
$\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$. Muni de la loi induite, c'est un groupe, appelé <u>groupe orthogonal</u> de E.

Proposition 26
Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. $f \in \mathrm{O}(E) \iff f^* = f^{-1}$.

Proposition 27
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$. $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

Proposition 28
$\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$. Muni de la loi induite, c'est un groupe, appelé <u>groupe spécial orthogonal</u> de E.

Proposition 29
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E (de dimension n).
$f \in \mathrm{SO}(E) \iff A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{SO}(n)$.

Proposition 30

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}_{S_\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 31
(i) $\forall(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$, $R_\theta R_{\theta'}=R_{\theta+\theta'}=R_{\theta'}R_\theta$.
(ii) $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\times)$ est commutatif.

Proposition 32
Si E est de dimension 2, $(\mathrm{SO}(E),\circ)$ est commutatif.

Proposition 33
On suppose E de dimension 2, orienté. Soit r la rotation vectorielle de mesure d'angle $\theta\in\mathbb{R}$. Soit $a\in E$ tel que $\|a\|=1$.

$$\cos(\theta)=(a|r(a)) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta=\det(a,r(a))$$

le déterminant est calculé dans n'importe quelle base orthonormée directe.

Proposition 34
On suppose E de dimension 2, orienté.
Soient u et v dans E tels que $\|u\|=\|v\|=1$. Il existe une unique rotation r telle que $v=r(u)$.

Proposition 35
On suppose E de dimension 2, orienté.
Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. On note θ une mesure de l'angle de ces deux vecteurs.

$$(u|v)=\|u\|\|v\|\cos\theta \quad \det(u,v)=\|u\|\|v\|\sin\theta$$

le déterminant étant calculé dans n'importe quelle base orthonormée directe.

Théorème 3
Soit E un plan euclidien orienté. Toute isométrie de E est ou bien une rotation ou bien une réflexion.

Proposition 36
Soit $f\in\mathrm{O}(E)$.
Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $V^\perp$ est stable par f et les endomorphismes induits par f sur V et $V^\perp$ sont orthogonaux.

Proposition 37
Soit $f\in\mathrm{O}(E)$. $\mathrm{Sp}(f)\subset\{-1,1\}$.

Théorème 4
Soit $f\in\mathrm{O}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice représentative de f dans cette base soit diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux :
- des blocs de tailles 1 de la forme (ε), avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$,
- des blocs de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ avec $\theta\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

Théorème 5
Soit $A\in\mathrm{O}(n)$. A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux :
- des blocs de tailles 1 de la forme (ε), avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$,
- des blocs de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ avec $\theta\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

Proposition 38
Soit $f \in SO(E)$ avec E de dimension 3. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proposition 39
Soit $f \in SO(E)$ avec E de dimension 3.

- Il existe une droite D, stable par f et telle que $f_D = Id_D$,
- soit P le plan orthogonal à D, P est stable par f et f_P est une rotation plane.