CALCUL DIFFERENTIEL ET OPTIMISATION

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de E et à valeurs dans F.

Proposition 1
Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Proposition 2
Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet en a une dérivée selon tout vecteur v non nul de E et

$$D_v f(a) = df(a)(v).$$

Proposition 3
Soit $f : U \to F$. Soit $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \le j \le n}$ une base de E.

(i) Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ f possède une dérivée partielle suivant la j-ième variable en a et

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a)(e_j).$$

(ii) Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ f possède une dérivée partielle suivant la j-ième variable en a et

$$\begin{array}{cccc} df(a) & : & E & \to & F \\ & & h & \mapsto & \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \end{array} \qquad \text{si} \quad h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j.$$

Proposition 4
Soit $f : U \to F$, f constante. Alors f est différentiable sur U et $df = 0$.

Proposition 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit U un ouvert de E. f est différentiable sur U et $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$, $a \mapsto f$.

Proposition 6
On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : U \to F$. Soit $a \in U$. f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a. Si c'est le cas, $f'(a) = df(a)(1)$.

Proposition 7 (**Linéarité de la différentielle**)
Soient f et $g : U \to F$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Soit $a \in U$. Si f et g sont différentiables en a, $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

(ii) Si f et g sont différentiables sur U, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur U et

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg.$$

Proposition 8
Soient G et H deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient $f : U \to F$ et $g : U \to G$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire.

(i) Soit $a \in U$. Supposons f et g différentiables en a. Alors $B(f, g)$ est différentiable en a et pour $h \in E$

$$d(B(f, g))(a)(h) = B(df(a)(h), g(a)) + B(f(a), dg(a)(h)).$$

(ii) Supposons f et g différentiables sur U, alors $B(f, g)$ est différentiable sur U.

Proposition 9
Soit $(E_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(f_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille d'applications de U vers E_k, U étant un ouvert de E. Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$, p-linéaire.
(i) Soit $a \in U$. On suppose chaque f_k différentiable en a. Alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est différentiable en a et pour $h \in E$,

$$d(M(f_1, \ldots, f_p))(a)(h) = \sum_{k=1}^{p} M(f_1(a), \ldots, f_{k-1}(a), df_k(a)(h), f_{k+1}(a), \ldots, f_p(a)).$$

(ii) Si chaque f_k est différentiable sur U, alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est différentiable sur U.

Théorème 1 (Composition)
Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : U \to F$. Soit $g : V \to G$, avec V ouvert de F. On suppose que $f(U) \subset V$.

(i) Soit $a \in U$ tel que f soit différentiable en a et g soit différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

(ii) Si f est différentiable sur U et si g est différentiable sur V, alors $g \circ f$ est différentiable sur U.

Proposition 10
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. Soit $\gamma : I \to U$. Soit $f : U \to F$. Soit $t \in I$. On suppose γ dérivable en t et f différentiable en $\gamma(t)$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

Proposition 11
Supposons que $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$.
Soit $f : U \to F$. Soit $g : V \to G$, avec V ouvert de F. On suppose que $f(U) \subset V$. Soit $a \in U$.
Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a).$$

Théorème 2
Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : U \to F$. Soit $g : V \to G$, avec V ouvert de F. On suppose que $f(U) \subset V$. Soit $a \in U$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F. On écrit $f = \sum_{i=1}^{p} f_i\varepsilon_i$. On suppose f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)).$$

Théorème 3
On suppose que E est muni d'un produit scalaire $(.\mid.)$: $(E,(.\mid.))$ est donc un espace euclidien. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ une forme linéaire sur E. Alors il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = (v \mid x)$.

Proposition 12
On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Alors

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)e_j.$$

Proposition 13
On suppose que E est un espace euclidien. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose f différentiable en a et $\nabla f(a) \neq 0$. $v \mapsto D_v f(a)$ est maximale sur $\{v \in E \mid \|v\| = 1\}$ en $v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|}\nabla f(a)$ et uniquement en ce vecteur.

Théorème 4
Soit $f : U \to F$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f possède des dérivées partielles relativement à $\mathcal{B}$ en tout point de U et ces dérivées partielles sont continues sur U.

Proposition 14
$\mathcal{C}^1(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(U,F),+,.)$.

Proposition 15
Soient G et H deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : U \to F$ et $g : U \to G$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(U,G)$. Alors $B(f,g) \in \mathcal{C}^1(U,H)$.

Proposition 16
Soit $(E_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(f_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille d'applications de U vers E_k, U étant un ouvert de E. Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$, p-linéaire.
Si chaque f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $M(f_1,\ldots,f_p)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème 5 (Composition)
Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U,F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(V,G)$, V ouvert de F, avec $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U,G)$.

Théorème 6
Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $\gamma : [0,1] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, γ à valeurs dans U. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt.$$

Théorème 7
Soit U un ouvert connexe par arcs de E. Soit $f : U \to F$. f est constante si et seulement si f est différentiable et $df = 0$.

Exemples

α. Soit X un sous-espace affine de E de direction V. Alors pour tout $x \in X$, $T_xX = V$.

β. On suppose E euclidien. X est la sphère de centre a et de rayon R. Alors pour tout $x \in X$, $T_xX = (x-a)^\perp$.

γ. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$, différentiable.
Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U,\ z = f(x,y)\}$. Soit $a = (a_1, a_2, f(a_1,a_2)) \in S$.
On note $\tilde{a} = (a_1, a_2)$. Alors

$$T_aS = \left\{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = v_1\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{a}) + v_2\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{a})\right\}.$$

Théorème 8 (**Espace tangent à une partie définie par une équation**)
Soit $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E. On pose $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
On suppose $X \neq \emptyset$. Soit $x \in X$ tel que $dg(x) \neq 0$. Alors

$$T_xX = \mathrm{Ker}(dg(x)).$$

Théorème 9 (**Cas particulier : E euclidien**)
Soit $g : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E. On pose $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
On suppose $X \neq \emptyset$. Soit $x \in X$ tel que $\nabla g(x) \neq 0$. Alors

$$T_xX = \nabla g(x)^\perp.$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a, pour $x \in X$, avec $\nabla g(x) \neq 0$,

$$T_xX = \left\{(h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)h_i = 0\right\}.$$

Proposition 17
Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. $\mathcal{C}^k(U,F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(U,F), +, .)$.

Proposition 18
Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soient G et H deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : U \to F$ et $g : U \to G$. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. On suppose que $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(U,G)$. Alors $B(f,g) \in \mathcal{C}^k(U,H)$.

Proposition 19
Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille d'applications de U vers E_i, U étant un ouvert de E. Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$, p-linéaire. Si chaque f_i est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, alors $M(f_1,\dots,f_p)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Théorème 10 (**Composition**)
Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(V,G)$, V ouvert de F, avec $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(U,G)$.

Théorème 11 (**de Schwarz**)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $\forall a \in U, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Proposition 20
Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$ tel que f soit différentiable en a. Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f i.e. $df(a) = 0$.

Proposition 21
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de E. Soit $X \subset U$. On suppose que :

- $f_{|X}$ admet un extremum local en x
- f est différentiable en x.

Alors pour tout $v \in T_x X$, $df(x)(v) = 0$.

Théorème 12 (**Optimisation sous contrainte**)
Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, U ouvert de E. On note $X = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.
Soit $x \in X$ tel que $dg(x) \neq 0$ et $f_{|X}$ admet un extremum local en x. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(x) = \lambda dg(x)$.

Cas particulier si E est euclidien, on peut réécrire le résultat :
si $f_{|X}$ admet un extremum local en x alors $\nabla f(x) \in (T_x X)^\perp$.

Théorème 13 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soit $a \in U$.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad [h \to 0]$$

ou encore

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2}(H_f(a)h \mid h) + o(\|h\|^2) \quad [h \to 0].$$

Théorème 14 (**Condition nécessaire du second ordre**)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
On suppose que f admet un minimum local en a. Alors
(i) a est un point critique de f : $df(a) = 0$,
(ii) $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Remarque pour un maximum local en a, $H_f(a) \in S_n^-(\mathbb{R})$.

Théorème 15 (**Condition suffisante du second ordre**)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
On suppose que

- a est un point critique de f, i.e. $df(a) = 0$,
- $H_f(a) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Alors, f admet un minimum local strict en a.

Remarque si a est un point critique et si $H_f(a) \in S_n^{--}(\mathbb{R})$, alors f admet un maximum local strict en a.

Théorème 16 (n=2)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $a \in U$ tel que $df(a) = 0$. On pose (notation de Monge)

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t \geq 0$, alors f présente un minimum local strict en a.
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t \leq 0$, alors f présente un maximum local strict en a.
3. Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne présente pas d'extremum local en a (on parle de point col ou de point selle).