EVN DE DIMENSION FINIE

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1
Toute suite convergente dans E est bornée.

Proposition 2
Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente (et converge vers la limite de la suite de départ).

Théorème 1
La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme sur E.

Proposition 3
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le p}$ une base de E. Soit (x_n) une suite d'éléments de E, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \sum\limits_{i=1}^{p} x_{n,i}e_i$ avec pour $i = 1 \dots p$ $(x_{n,i}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit $l = \sum\limits_{i=1}^{p} l_i e_i$ un élément de E. Il y a équivalence entre les énoncés.

(i) (x_n) converge vers l dans E.
(ii) Pour $i = 1 \dots p$, $(x_{n,i})$ converge vers l_i dans $\mathbb{K}$.

Proposition 4 Caractérisation séquentielle des fermés
Soit F une partie de E. Il y a équivalence entre les énoncés.

(i) F est fermée.
(ii) Toute suite convergente d'éléments de F converge dans F.

Proposition 5 Caractérisation de la limite à l'aide des applications coordonnées.
Soit $f : A \to F$, avec A une partie de E. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$ une base de F.
Pour $x \in A$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, avec pour $i = 1 \dots n$, $f_i : A \to \mathbb{K}$.
Soit a un point adhérent à A. Soit $b = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i e_i \in F$. Il y a équivalence entre les énoncés.

(i) f converge vers b en a.
(ii) Pour $i = 1 \dots n$, f_i converge vers b_i en a.

Proposition 6 Caractérisation séquentielle des limites.
Soit $f : A \to F$, avec A une partie de E. Soit a un point adhérent à A. Soit $b \in F$. Il y a équivalence entre les énoncés.
(i) f tend vers b en a.
(ii) Pour toute suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(a_n))$ converge vers b.

Proposition 7 Caractérisation de la continuité à l'aide des applications coordonnées.
Soit $f : A \to F$, avec A une partie de E. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F.
Pour $x \in A$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, avec pour $i = 1 \dots n$, $f_i : A \to \mathbb{K}$.
Il y a équivalence entre les énoncés.
(i) f continue sur A.
(ii) Pour $i = 1 \dots n$, f_i continue sur A.

Proposition 8 Continuité des applications polynomiales en les coordonnées.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E. Si f est polynômiale en les coordonnées dans $\mathcal{B}$ alors f est continue.

Proposition 9
Toute fonction lipschitzienne est continue.

Proposition 10
Soit $f : E \to \mathbb{R}$, continue sur E.
(i) $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.
(ii) $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ sont des fermés de E.

Théorème 2
Soit A une partie de E. Soit $f : A \to \mathbb{R}$, continue sur A. Si A est une partie fermée et bornée de E alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 3 Continuité des applications linéaires
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est lipschitzienne et donc continue sur E.

Théorème 4 Continuité des applications multilinéaires
Soit $f : E^n \to F$, n-linéaire. Alors f est continue.