SERIES NUMERIQUES

Théorème 1 (**spécial à certaines séries alternées**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels.
Si $\sum u_n$ est alternée, si $u_n \to 0$ et si $(|u_n|)$ est décroissante, alors

1. $\sum u_n$ converge, on note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'indice n de $\sum u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1},
4. si on note S la somme de la série, S est du signe de u_0.

Théorème 2 (**Règle de d'Alembert**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.
On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite l dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors,

1. si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
2. si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Théorème 3 (**Exponentielle**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée l'exponentielle de z et est notée $\exp(z)$ ou e^z.

Théorème 4 (**Produit de Cauchy**)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques absolument convergentes.
Le produit de Cauchy (défini par $\sum w_n$ avec $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) est une série absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Théorème 5 (**Comparaison série-intégrale**)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et décroissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. $\sum w_n$ converge.
2. $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Si $\sum f(n)$ converge alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - \int_0^{+\infty} f.$$

Théorème 6 (**Formule de Stirling**)

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$