SERIES NUMERIQUES

Proposition 1 (**Comparaison à une série de Riemann.**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

(i) S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ et $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $n^\alpha u_n \to l$, alors $\sum u_n$ diverge.

Proposition 2 (**Règle de d'Alembert**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs.
On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite l dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors,

1. si $l < 1$, $\sum u_n$ converge,
2. si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 3 (**Exponentielle**)
Soit $z \in \mathbb{C}$. $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. Sa somme est appelée l'exponentielle de z et est notée $\exp(z)$ ou e^z.

Proposition 4 (**Sommation des relations de comparaison**)
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.

(i) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge (absolument) et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Proposition 5 (**Sommation des relations de comparaison**)
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs divergente.

(i) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(ii) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Théorème 1 (**spécial à certaines séries alternées**)
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels.
Si $\sum u_n$ est alternée, si $u_n \to 0$ et si $(|u_n|)$ est décroissante, alors

1. $\sum u_n$ converge, on note alors, pour $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'indice n de $\sum u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1},
4. si on note S la somme de la série, S est du signe de u_0.

Théorème 2 (**Comparaison série-intégrale**)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et décroissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. $\sum w_n$ converge.
2. $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f\right)$ converge.
3. Si $\sum f(n)$ converge alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f.$$