SERIES ENTIERES

Théorème 1 Lemme d'Abel
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(|a_n|\rho^n)$ soit bornée.
(i) Pour tout $z \in \mathbb{K}$, $a_n z^n = \mathcal{O}\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right) \quad [n \to +\infty]$.
(ii) Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < \rho$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Proposition 1
Soit $\sum a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence R.
(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Proposition 2
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
(i) $a_n = \mathcal{O}(b_n) \Longrightarrow R_a \geq R_b$.
(ii) $a_n \sim b_n \Longrightarrow R_a = R_b$.

Proposition 3
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Proposition 4
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
(i) On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$. Alors $R \geq \mathrm{Min}(R_a, R_b)$. Et si $R_a \neq R_b$, alors $R = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$.
(ii) On note R' le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors $R' \geq \mathrm{Min}(R_a, R_b)$.
(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Proposition 5
Une série entière de la variable réelle est normalement convergente sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence.

Proposition 6
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. S est continue sur $]-R, R[$.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. S est continue sur $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Proposition 7
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme S. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Proposition 8
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme S.

(i) S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n.$$

(ii) En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}.$$

Proposition 9 Unicité du développement en série entière s'il existe
Soit $f :]-r, r[\to \mathbb{K}$, avec $r > 0$ développable en série entière sur $]-r, r[$. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière telle que son rayon de convergence soit supérieur à r et telle que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et les coefficients (a_n) sont uniques puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Développements en série entière classiques.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\alpha x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < 1, \quad \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < 1, \quad \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

$\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$

$\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1-x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$\forall x \in]-1, 1[\quad \mathrm{Arctan} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R},\quad \forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \text{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} (-1)^n x^{2n}$$

Pour la variable complexe :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$