SERIES DE FONCTIONS

Théorème 1 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I, alors (f_n) converge simplement sur I et si on note f sa limite simple, f est continue sur I.

Théorème 2 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme est continue sur I.

Théorème 3 (Interversion des limites pour une suite de fonctions)
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On suppose que (f_n) converge uniformément sur I et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \underset{a}{\to} b_n$ ($b_n \in \mathbb{K}$).
Alors (f_n) converge simplement sur I, on note f sa limite simple ; (b_n) converge et si on note b sa limite, $f \underset{a}{\to} b$ i.e.

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Théorème 4 (Interversion des limites pour une série de fonctions)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur I et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \underset{a}{\to} b_n$ ($b_n \in \mathbb{K}$).
Alors $\sum f_n$ converge simplement sur I, on note S sa somme ; $\sum b_n$ converge et si on note b sa somme, $S \underset{a}{\to} b$ i.e.

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Théorème 5 (Intégration de la limite d'une suite de fonctions)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$.
Alors (f_n) converge simplement sur $[a,b]$, on note f sa limite simple. f est continue sur $[a,b]$, $(\int_a^b f_n)$ converge et $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$ i.e.

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Théorème 6 (Intégration de la somme d'une série de fonctions)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.
Alors $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$ et sa somme S est continue sur $[a, b]$; $\sum \int\limits_a^b f_n$ converge et $\int\limits_a^b S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_a^b f_n$ i.e.

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Théorème 7 (Dérivation de la limite d'une suite de fonctions)
Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que (f_n) converge simplement sur I vers f et que (f_n') converge uniformément sur tout segment de I.
Alors (f_n') converge simplement sur I. On note g sa limite simple. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout x dans I, $f'(x) = g(x)$ i.e.

$$(\lim_{n\to+\infty} f_n)'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

Théorème 8 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.
Alors $\sum f_n'$ converge simplement sur I, on note T sa somme ; si on note S la somme de la série de fonctions $\sum f_n$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout x dans I, $S'(x) = T(x)$ i.e.

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Théorème 9 (Dérivation version $\mathcal{C}^k$)
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I et que $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I. On note f la limite simple de (f_n).
Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, pour tout x dans I,

$$f^{(j)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(j)}(x).$$

Théorème 10 (Dérivation version $\mathcal{C}^k$)
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I et que $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I. On note S la somme de $\sum f_n$.
S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, pour tout x dans I,

$$S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x).$$