REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARREES

Soit E un K-espace vectoriel, K étant un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Proposition 1
Soit $(V_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
$V_1+\cdots+V_p$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup\limits_{i=1}^{p} V_i$.

Proposition 2
Soit $(V_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) $V_1\oplus\cdots\oplus V_p$,
(ii) la seule décomposition de 0 dans $V_1+\cdots+V_p$ est $0+\cdots+0$,
(iii) $\forall x\in V_1+\cdots+V_p$, $\exists!(x_1,\ldots,x_p)\in V_1\times\cdots\times V_p$, $x=x_1+\cdots+x_p$.

Proposition 3
Soit $(V_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, en somme directe.
Pour $i=1\cdots p$ on prend $x_i\in V_i\setminus\{0\}$. Alors la famille $(x_1,\ldots,x_p)$ est libre.

Proposition 4
Soient $V_1,\ldots,V_p$ des sous-espaces vectoriels de E, chacun des V_i étant de dimension finie.
(i) Alors $V_1+\cdots+V_p$ est de dimension finie et $\dim(V_1+\cdots+V_p)\leq\sum\limits_{k=1}^{p}\dim(V_k)$.
(ii) On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la somme $V_1+\cdots+V_p$ est directe.

Proposition 5
On suppose E de dimension finie. Soient $V_1,\ldots V_p$ des sous-espaces vectoriels de E, en somme directe.
Ils sont supplémentaires si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{p}\dim(V_k)=\dim(\mathrm{E})$.

Proposition 6 - Définition
Soit $(V_1,\cdots,V_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E. Pour $i=1\cdots p$, soit $\mathcal{E}_i$ une base de V_i. On note $\mathcal{E}$ la concaténée de ces bases. Alors $\mathcal{E}$ est une base de E. Elle est dite <u>adaptée</u> à la décomposition $E=V_1\oplus\cdots\oplus V_p$.

Proposition 7
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(E_1,\ldots,E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. Pour $i=1,\ldots,p$, soit $u_i\in\mathcal{L}(E_i,F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $u\in\mathcal{L}(E,F)$ telle que pour $i=1,\ldots,n$, $u_{|E_i}=u_i$.

Proposition 8
Soit $M=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, où $p+q=n$. Alors

$$\det(M)=\det(A)\det(C).$$

Proposition 9
Le déterminant est invariant par la multiplication à droite où à gauche par une matrice de transvection par blocs.

Proposition 10
Soient u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.

Proposition 11
On suppose E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est stable par u si et seulement si la matrice représentative de u dans une base de E adaptée à F est triangulaire supérieure par blocs, i.e.

$$\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{B}'$ est formée des premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ qui forment une base de F, alors $A = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(u_F)$.

Proposition 12
Soient u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent alors pour toute valeur propre λ de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Proposition 13
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe.

Proposition 14
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p} \in E^p$ une famille de vecteurs propres associés respectivement à chacune des valeurs propres λ_i. Alors $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre dans E.

Dorénavant on suppose E de dimension finie n.

Proposition 15
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}(u)) \leq n$.

Proposition 16
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\lambda \in K$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n \text{ est non inversible} \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Proposition 17
Deux matrices semblables ont même spectre.

Proposition 18
Un endomorphisme de E et sa matrice représentative dans une base donnée ont même spectre et leurs sous-espaces propres sont isomorphes.

Proposition 19
Soit K' un sous-corps de K. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K')$. Alors $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\mathrm{Sp}_{K'}(A) \subset \mathrm{Sp}_K(A)$.

Proposition 20
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Proposition 21
(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\lambda \in K$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in K$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

Proposition 22
(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.

Proposition 23
Soient n et r deux entiers tels que $0 < r < n$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$. Alors $\chi_M = \chi_A \chi_C$.

Proposition 24
Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$ est triangulaire, alors $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})$.

Proposition 25
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $\chi_{u_F} | \chi_u$.

Proposition 26
(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On note m sa multiplicité.

$$1 \leq \dim\left(E_\lambda(u)\right) \leq m \leq n.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On note m son ordre de multiplicité.

$$1 \leq \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq m \leq n.$$

Proposition 27
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) u est diagonalisable

(ii) $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

(iii) $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = \dim(E)$.

Proposition 28
(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{card}((\mathrm{Sp}\,(u)) = n$ alors u est diagonalisable.
(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Proposition 29
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

Proposition 30
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) = A$. A est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Proposition 31
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. A est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Proposition 32
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) A est diagonalisable

(ii) $\mathcal{M}_{n,1}(K) = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$

(iii) $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = n.$

Proposition 33
(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que card$((\mathrm{Sp}(A)) = n$ alors A est diagonalisable.
(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que χ_A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

Proposition 34
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$.

Proposition 35
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$de E telle que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$.

Proposition 36
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) = A$. A est trigonalisable si et seulement si u est trigonalisable.

Proposition 37
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. A est trigonalisable si et seulement si u est trigonalisable.

Théorème 1
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Théorème 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé.

Proposition 38
(i) Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
(ii) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Proposition 39
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable alors sa trace est la somme de ses valeurs propres, comptées avec multiplicité, et son déterminant, le produit.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si A est trigonalisable, alors sa trace est la somme de ses valeurs propres, comptées avec multiplicité et son déterminant, le produit.