REDUCTION

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de valeurs propres de A deux à deux distinctes. Alors les $E_{\lambda_i}(A)$ sont en somme directe.

Proposition 2

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(u) = 0$. Alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(A) = 0$. Alors le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.

Proposition 3

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \chi_u(\lambda) = 0.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \chi_A(\lambda) = 0.$$

Proposition 4

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Proposition 5

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé : on écrit $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Alors

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \qquad \mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A soit scindé : on écrit $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Alors

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \qquad \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Proposition 6

(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On note m l'ordre de multiplicité de λ.

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m \leq n.$$

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On note m l'ordre de multiplicité de λ.

$$1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m \leq n.$$

Théorème 1 Théorème de Hamilton-Cayley

(i) Soit u un endomorphisme de E.

$$\chi_u(u) = 0.$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\chi_A(A) = 0.$$