INTEGRABILITE ET SUITES OU SERIES DE FONCTIONS

Théorème 1 Théorème de convergence dominée
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose
(i) Chaque f_n est continue par morceaux sur I.
(ii) (f_n) converge simplement sur I vers f, continue par morceaux sur I.
(iii) Il existe φ, définie sur I, continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs positives telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \qquad |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

Alors
1. Chaque f_n est intégrable sur I,
2. f est intégrable sur I,
3. $$\int_I f_n \underset{n \to +\infty}{\to} \int_I f.$$

Théorème 2 Théorème d'interversion somme-intégrale
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose
(i) Chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur I,
(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme f est continue par morceaux sur I,
(iii) $\sum \int_I |f_n|$ converge.
Alors
1. f est intégrable sur I,
2. $$\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$