INTEGRALES A PARAMETRE

Théorème 1 Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$.
On suppose
(i) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
(ii) $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,
(iii) pour tout segment S de I, il existe φ_S fonction de J dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, telle que

$$\forall x \in S \quad \forall t \in J \qquad |f(x,t)| \leq \varphi_S(t).$$

Alors,
1. $F : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est définie sur I,
2. F est continue sur I.

Théorème 2 Théorème de régularité d'une intégrale à paramètre.
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$.
On suppose
(i) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
(ii) $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
(iii) $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
(iv) pour tout segment S de I, il existe φ_S fonction de J dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, telle que

$$\forall x \in S \quad \forall t \in J \qquad |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_S(t).$$

Alors,
1. $F : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
2. **(Formule de Leibniz)**

$$\forall x \in I \qquad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Théorème 3 Théorème de régularité d'une intégrale à paramètre, version $\mathcal{C}^k$.
Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$.
On suppose
(i) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
(ii) $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
(iii) $\forall p \in [\![1,k]\!]$, $\forall x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
(iv) pour tout $p \in [\![1,k]\!]$, pour tout segment S de I, il existe $\varphi_{p,S}$ fonction de J dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur J, à valeurs positives, telle que

$$\forall x \in S \quad \forall t \in J \qquad |\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)| \leq \varphi_{p,S}(t).$$

Alors,
1. $F : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
2.

$$\forall p \in [\![1,k]\!] \quad \forall x \in I \qquad F^{(p)}(x) = \int_J \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)dt.$$