INTEGRABILITE

**Proposition 1 (Intégrales de référence)**
(i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
(iii) $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.
(iv) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. On note $I = [a, b[$, ou $I = ]a, b]$ ou $I = ]a, b[$.

**Proposition 2 Linéarité**
L'ensemble des applications continues par morceaux sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale sur $I$ converge est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \mapsto \int_a^b$ est une forme linéaire sur cet espace.

**Proposition 3 Positivité**
(i) Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$ à valeurs réelles telle que $\int_a^b f$ converge. On suppose que $\{x \in I \mid f(x) < 0\}$ est fini, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0.$$

(ii) Soient $f$ et $g$ continues par morceaux sur $I$ à valeurs réelles telles que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent. On suppose que $\{x \in I \mid f(x) < g(x)\}$ est fini, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt.$$

**Proposition 4 Relation de Chasles**
Soit $f$ continue par morceaux sur $I$ tel que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Soit $c \in ]a, b[$. Alors $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

**Théorème 1 Changement de variable**
Soient $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $\alpha < \beta$. On note $J = [\alpha, \beta[$, ou $J = ]\alpha, \beta]$ ou $J = ]\alpha, \beta[$. Soit $\varphi$ une bijection de $J$ sur $I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$ (alors $\varphi$ est strictement monotone). Soit $f$ continue par morceaux sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et si les deux intégrales convergent,
dans le cas où $\varphi$ est strictement croissante :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du = \int_a^b f(t)dt,$$

dans le cas où $\varphi$ est strictement décroissante :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du = -\int_a^b f(t)dt.$$

**Théorème 2 Intégration par parties**
Soient $f$ et $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que $fg$ possède une limite aux bornes de $I$, alors
$\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ sont de même nature, et si elles convergent

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

**Théorème 3**
Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$. Si $f$ a une intégrale absolument convergente sur $I$, alors l'intégrale de $f$ sur $I$ converge et

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

**Proposition 5**
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $I$ et intégrables sur $I$ est un $\mathbb{K}$-vectoriel et $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur cet espace.

**Théorème 4 Comparaison**
Soient $f$ et $g$ des fonctions continues par morceaux sur $I$.
(i) Si $|f| \leq |g|$ et si $g$ est intégrable sur $I$, alors $f$ est intégrable sur $I$.
On suppose, pour les deux points suivants que $I = [a, b[$. (On adapte dans les autres cas.)
(ii) Si $f = \mathcal{O}_b(g)$ et si $g$ est intégrable sur $I$ alors $f$ est intégrable sur $I$.
(iii)Si $f \underset{b}{\sim} g$ et si $g$ est intégrable sur $I$, alors $f$ est intégrable sur $I$.

**Proposition 6 Fonction Gamma d'Euler**

$$\Gamma\ :\ x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad \text{est définie sur } \mathbb{R}_+^*.$$

**Proposition 7**
Soit $f$ continue sur $I$, intégrable sur $I$, alors

$$\int_a^b |f(t)|dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

**Proposition 8**
(i) L'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(ii) L'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles et de carrés intégrables sur $I$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur cet espace.