FAMILLES SOMMABLES

Proposition 1
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $J \subset I$, $\sum\limits_{i\in J} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Proposition 2 (**Permutation de l'ordre de sommation**)
Soit σ une permutation de I. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Proposition 3
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. $\sum u_n$ converge $\iff$ (u_n) est sommable.
Si (u_n) est sommable, sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 4
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs. On suppose que pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$. Alors
(i) $\sum\limits_{i\in I} u_i \leq \sum\limits_{i\in I} v_i$,
(ii) si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 5
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs.
(i)

$$\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

(ii) Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 6
Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

(ii) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

Théorème 1 (**de sommation par paquets**)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Théorème 2 (de Fubini positif)
Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Proposition 7
Soit $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. (u_n) est sommable si et seulement si $\sum u_n$ est absolument convergente et si c'est le cas, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 8
Soit $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$ une famille sommable. Soit $J\subset I$. Alors $(u_j)_{j\in J}$ est sommable.

Proposition 9
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes, sommable. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Il existe une partie finie F de I telle que

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \leq \varepsilon.$$

Proposition 10
Soit $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$ une famille sommable. Alors $\left|\sum\limits_{i\in I} u_i\right| \leq \sum\limits_{i\in I} |u_i|$.

Proposition 11 (Permutation de l'ordre de sommation)
Soit σ une permutation de I. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes.

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff (u_{\sigma(i)})_{i\in I} \text{ est sommable.}$$

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

Proposition 12 (Comparaison)
Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille à termes positifs. On suppose :
- $\forall i\in I$, $|u_i|\leq v_i$,
- $(v_i)_{i\in I}$ est sommable.

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\left|\sum\limits_{i\in I} u_i\right| \leq \sum\limits_{i\in I} |u_i| \leq \sum\limits_{i\in I} v_i$.

Proposition 13 (Linéarité)
(i) $l^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{C}^I,+,.)$.
(ii) L'application, $l^1(I)\to\mathbb{C}$, $(u_i)_{i\in I}\mapsto \sum\limits_{i\in I} u_i$, est une forme linéaire.

Théorème 3 (**de sommation par paquets**)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Alors

- pour tout $j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable,
- $\left(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable et
- $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{j\in J}\left(\sum\limits_{i\in I_j} u_i\right)$.

Théorème 4 (**de Fubini**)
Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes sommable.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Théorème 5 (**Produit**)
Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles de complexes sommables. Alors
(i) $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et
(ii) $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum\limits_{i\in I} u_i\right)\left(\sum\limits_{j\in J} v_j\right)$.

Théorème 6 (**Produit généralisé**)
Soit $((u_{k,i_k})_{i_k\in I_k})_{1\leq k\leq n}$ une famille finie de familles sommables. Alors $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} u_{k,i_k}\right)_{(i_1,\dots,i_n)\in I_1\times\dots\times I_n}$ est sommable et

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I_1\times\dots\times I_n}\left(\prod_{k=1}^{n} u_{k,i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k\in I_k} u_{k,i_k}\right).$$

Théorème 7 (**Produit de Cauchy**)
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres complexes absolument convergentes. Alors la série de terme général $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$, appelée <u>produit de Cauchy</u> des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_p v_q\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$