ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Proposition 1 Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Proposition 2 Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|(x|y)| = \|x\|\|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \text{ liée.}$$

Proposition 3 Inégalité de Minkowski
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Proposition 4 Cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ y = \lambda x.$$

Proposition 5
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\
\|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y) \\
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{(Identité du parallélogramme)} \\
(x|y) &= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \quad \text{(Identité de polarisation)}
\end{aligned}$$

Proposition 6 Relation de Pythagore
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel.

(i) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(ii) Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$ une famille orthogonale, alors

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Proposition 7
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille orthogonale de E telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est non nul. Alors $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre dans E.
En particulier, une famille orthonormale est libre.

Proposition 8
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel.
(i) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et

$$F \cap F^\perp = \{0\}.$$

(ii) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires orthogonaux, alors $G = F^\perp$.

Proposition 9 Distance à un sous espace vectoriel possédant un supplémentaire orthogonal
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel.
Soit F un sous-espace vectoriel de E possédant un supplémentaire orthogonal. On note p le projecteur orthogonal sur F (projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$).
Soit x dans E. La distance de x à F est atteinte pour un unique élément de F : $p(x)$. Ou encore : si on note $d = \operatorname*{Inf}_{y\in F} \|x - y\|$, alors $d = \|x - p(x)\|$ et si $z \in E$ vérifie $d = \|x - z\|$, alors $z = p(x)$.

Proposition 10 Projection orthogonale sur une droite
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $a \in E$, $a \neq 0$. On note $D = \text{Vect}(a)$.
Alors, $D^\perp$ est un hyperplan de E, supplémentaire de D. D possède donc un supplémentaire orthogonal.
On note p le projecteur orthogonal sur D. Alors, pour tout $x \in E$,

$$p(x) = \frac{(a|x)}{(a|a)} a.$$

Théorème 1 Existence de bases orthonormales en dimension finie
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Alors, F possède une base orthonormale.

Proposition 11
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, n.
(i) $E = F \oplus F^\perp$.
(ii) On note p le projecteur orthogonal sur F. Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$,

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i.$$

Proposition 12 Distance à un sous espace vectoriel de dimension finie
Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
On note p le projecteur (orthogonal) sur F.
Soit x dans E. $y \mapsto \|x - y\|$ admet un minimum global sur F atteint (uniquement) en $p(x)$.

Proposition 13 Inégalité de Bessel
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, n. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $x\in E$,

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i|x)^2 \leq \|x\|^2.$$

Théorème 2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une unique famille orthonormale $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ de E telle que

$$\forall i\in [\![1,p]\!] \qquad \mathrm{Vect}(x_1\ldots,x_i)=\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_i) \quad \text{et} \quad (x_i|v_i)>0.$$

Théorème 3 Théorème de la base orthonormée incomplète
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille orthonormale de E $(p\leq n)$.
Il existe $(e_{p+1},\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ soit une base orthonormale de E.

Proposition 14
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien. Soit F un sous espace vectoriel de E.
(i) $E=F\oplus F^{\perp}$.
(ii) $\dim\big(F^{\perp}\big)=\dim E-\dim F$.
(iii) $\big(F^{\perp}\big)^{\perp}=F$.

Proposition 15
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit φ une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur a de E tel que

$$\forall x\in E, \qquad \varphi(x)=(a|x).$$

Proposition 16 Calculs dans une base orthonormée
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E.
(i) $\forall x\in E$, $x=\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$.
(ii) $\forall (x,y)\in E^2$, si $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ie_i$ alors $(x|y)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ et $\|x\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$.
(ii) Pour $(x,y)\in E^2$, on note X et Y les matrices représentative de x et y respectivement dans $\mathcal{B}$.

Alors $(x|y)=X^TY$ et $\|x\|=\sqrt{X^TX}$.

Proposition 17 Matrice représentative d'un endomorphisme dans une base orthonormée
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On note A la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ et $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. On a

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j}=(e_i|f(e_j)).$$

Proposition 18 Distance à un hyperplan
Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit H un hyperplan d'équation dans $\mathcal{B}$: $a_1x_1+\cdots+a_nx_n = 0$ avec $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(a_1,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0)$. Alors pour tout $x \in E$, de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans $\mathcal{B}$, la distance de x à H est

$$d(x,H) = \frac{|a_1x_1+\cdots+a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.$$