ESPACES PROBABILISES

Proposition 1
$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Proposition 2
Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Proposition 3
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
(i) $P(\emptyset) = 0$.
(ii) Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'événements deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(iii) Pour tout système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$, $\sum\limits_{i \in I} P(A_i) = 1$.
(iv) Pour tout événement A, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
(v) Pour A et B deux événements,
$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Théorème 1
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
(i) Continuité croissante.
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

(ii) Continuité décroissante.
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

(iii) Sous-additivité.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements au plus dénombrable

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Dans le cas dénombrable, on peut avoir $\sum P(A_n)$ divergente, on note alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.

Proposition 4 Formule des probabilités composées
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) est une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-2}}(A_{n-1})\cdots P_{A_1}(A_2)P(A_1).$$

Proposition 5 Formule des probabilités totales
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.
Soit B un événement. Alors $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n).$$

(Avec la convention $P_{A_n}(B)P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.)

La formule précédente reste valable pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Proposition 6 Formule de Bayes
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Soit B un événement de probabilité non nulle. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)}.$$