ENDOMORPHISMES SYMETRIQUES ET ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

E désigne un espace euclidien.

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) $f \in \mathcal{S}(E)$
(ii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ soit symétrique
(iii) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

Proposition 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) $f \in \mathcal{O}(E)$, i.e. $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$
(ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$
(iii) il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormée
(iv) pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

Proposition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre les énoncés :
(i) A est orthogonale
(ii) $A^T A = I_n$
(ii') $AA^T = I_n$
(iii) A est une matrice de passage entre deux bases orthonormées de E
(iv) la famille des colonnes de A forme une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
(v) la famille des lignes de A forme une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Proposition 4
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note A la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$.

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 5
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, A la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$ et A' celle de u dans $\mathcal{B}'$. Alors
(i) $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
(ii) $A' = P^T AP$.

Proposition 6
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note A la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$.

$$u \in \mathcal{SO}(E) \iff A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 7
On suppose E de dimension 3 et orienté. Pour $(u,v) \in E^2$ il existe un unique $w \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad [u,v,x] = (w|x).$$

w est appelé le <u>produit vectoriel</u> de u par v et est noté $u_\wedge v$.

Proposition 8
On suppose E de dimension 3 et orienté.
(i) L'application de $E \times E$ dans E, qui à (u,v) associe $u_\wedge v$ est bilinéaire antisymétrique.
(ii) Soit $(u,v) \in E^2$. $u_\wedge v = 0 \iff (u,v)$ liée.
(iii) Soit $(u,v) \in E^2$. $\quad u_\wedge v \perp u \quad$ et $\quad u_\wedge v \perp v$.
(iv) Soit $(u,v) \in E^2$. $\|u_\wedge w\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur u et v.

Proposition 9
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
(i) Soit V une sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $V^\perp$ est stable par u et les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$ sont symétriques.
(ii) Si λ et μ sont des valeurs propres distinctes de u, alors $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Proposition 10
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
(i) $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$.
(ii) Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $V^\perp$ est stable par u et les endomor phismes induits par u sur V et $V^\perp$ sont orthogonaux.

Proposition 11

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} |\theta \in \mathbb{R} \right\} \bigcup \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}_{S_\varphi} |\varphi \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 12
(i) $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$.
(ii) $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Proposition 13
On suppose E de dimension 2 et orienté. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.
Si $\det(f) = 1$, alors il existe θ réel, unique à 2π près, tel que pour toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E, on a la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ qui est R_θ.
(ii) Si $\det(f) = -1$, alors f est une réflexion, i.e. une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Proposition 14
On suppose E de dimension 2 et orienté.
(i) $\mathcal{SO}(E)$ est commutatif.
(ii) Soit f la rotation de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$.

$$\cos(\theta) = (a|f(a)) \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = [a, f(a)].$$

Proposition 15
On suppose E de dimension 3 et orienté. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$.
(i) Si $\det(f) = 1$, alors f est une rotation de E.
(ii) Si $\det(f) = -1$, alors ou bien f est une réflexion, ou bien f est la composée commutative d'une rotation et de la réflexion par rapport au plan orthogonal au support de l'axe de la rotation.

Proposition 16
On suppose E de dimension 3 et orienté. Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. f est la rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta} = (\mathrm{Vect}(a), a)$ et de mesure d'angle θ.
(i) $\mathrm{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$.
(ii) Si $x \in \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$, $(x|f(x)) = \|x\|^2 \cos\theta$ et $[x, f(x), a] = \|x\|^2 \sin\theta$.

Théorème 1 Théorème spectral
Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f un endomorphisme symétrique de E.
Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

Théorème 2 Théorème spectral, version matricielle
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\ D\ {}^tP$.