INTEGRALES A PARAMETRE

Exercice 1
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $K(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{2i\pi tx} dt$.

1. Montrer que K est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $K(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Montrer que $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{t} dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(x)$ pour tout réel x.

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note F la fonction qui à x associe $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt) dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Etablir une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.
4. En déduire une expression de F à l'aide des fonctions usuelles. (On admet que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

Exercice 4
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considèrera la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Arctan}(x\tan\theta) d\theta$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est le sens de variation de f ?
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et écrire sa dérivée sous la forme d'une intégrale.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. On pourra se servir de la première question.
5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5
Soit $f : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t dt$.

1. Trouver le domaine de définition de f, noté D.
2. Etudier la dérivabilité de f sur D et calculer sa dérivée (quand elle existe).
3. Calculer, pour $x \in D$, $xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x}$.
4. Expliciter f.

Exercice 6
On note f la fonction telle que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}\, dt$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer $f(x+1) - f(x)$ et exprimer alors f sous forme d'une somme. Comment retrouver ce résultat ?

Exercice 7*
On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur D et exprimer $f'(x)$ sous forme d'une intégrale.
3. Donner les variations de f à l'aide d'une relation de Chasles et d'un changement de variable.

Exercice 8*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{ixt} t^\alpha \, dt$$

Trouver (en fonction de α) le domaine de définition de F. Calculer $F(x)$.

Exercice 9*

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. On pose
$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)}\, dt$$
Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$, que $f(x) \leq x^2$ et préciser $f'(0)$.
3. Montrer que f est solution de $y'' - y = \frac{\pi}{2} - ax$ où $a = \int_0^\infty g(t)\, dt$.
4. Montrer que
$$f(x) = \frac{\pi}{2}\left(e^{-x} + x - 1\right)$$

Exercice 10*
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)t^x}\, dt$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.
2. Soit $x \in D$. Montrer que $1 - x \in D$ et que $f(1-x) = f(x)$.
3. Donner un équivalent de f aux bornes du domaine de définition.