INTEGRATION SUR UN INTERVALLE ET SUITES OU SERIES DE FONCTIONS

Exercice 1
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$. Montrer que (a_n) tend vers 0.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n} dx$. Montrer l'existence de I_n et étudier la nature de la suite (I_n).

Exercice 3
Etudier la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \, dx$.

Exercice 4
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et que $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5
Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x} \, dx$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 6
On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} te^{-nt}dt$. Montrer que I_n existe et vaut $\frac{1}{n^2}$.
2. On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}dt$.
   (a) Montrer que I existe et que $I = 2\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{1-e^{-u}}du$.
   (b) En déduire la valeur de I.
3. On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}dt$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier l'existence de $f(x)$.
   (b) En utilisant le résultat suivant : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $e^t - 1 \geq t$, montrer que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Exercice 7*
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^n \sin(nx)\, dx.$$

1. Déterminer la limite de (u_n).
2. Montrer que $\forall n \geq 1,\ 2u_n = \frac{1}{n} + u_{n-1}$.
3. En déduire la nature de $\sum(u_n)$.

Exercice 8*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$. De même, on définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction f_n par

$$\forall x \in [0, n[,\ f_n(x) = \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n \ ;\ \forall x \geq n,\ f_n(x) = 0$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \int_0^n f_n(x)\, dx$$

Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 9*
Soit (x_n) une suite strictement croissante de réels > 0 de limite infinie. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-x_n t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_n}$$

Exercice 10*
Démontrer le théorème de convergence dominée en supposant en outre que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I.

Exercice 11**

1. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$$
2. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt = -\gamma = - \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$