REDUCTION I

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E admettant deux valeurs propres distinctes λ et μ.
Montrer que, si x et y sont deux vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ, alors la famille (x, y) est libre et le vecteur $x+y$ n'est pas un vecteur propre de u.

Exercice 2
Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x = (x_n) \in E, \quad f(x) = (x_{n+1}).$$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. On note F le sous-espace vectoriel de E des suites convergentes.
   (a) Montrer que F est stable par f.
   (b) On note g l'endomorphisme de F induit par f. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de g.
3. Montrer que le seul polynôme annulateur de f est le polynôme nul.

Exercice 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur le "tour" qui valent 1 ($a_{1,j} = a_{i,1} = a_{i,n} = a_{n,j} = 1$). ($n \geq 2$).

1. Déterminer la trace, le noyau et le déterminant de A. (On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geq 3$.)
2. Préciser les éléments propres de A.

Exercice 4
Trouver les éléments propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ donné par

$$\varphi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

Exercice 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note P son polynôme caractéristique. On suppose que $P(0) \neq 0$.
Montrer que A est inversible et donner le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de P.

Exercice 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E et P un polynôme annulateur de f.

1. On suppose que $P(0) \neq 0$. Montrer que f est bijective.
2. On suppose que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7

Déterminer les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$

Exercice 8
Déterminer les éléments propres de $M = J + 2I_n$, où J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1.

Exercice 9
Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

a. Montrer que si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

b. Montrer que si E est de dimension finie, ceci est vrai même pour $\lambda = 0$.

c. Soient f, g les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $f(P) = P'$ et $g(P)$ est la primitive de P nulle en 0. Déterminer $\ker(f \circ g)$ et $\ker(g \circ f)$.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1, $P(0) = 1$ e $AB = P(A)$.

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 11
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A, en déduire une matrice D diagonale semblable à A.
2. Soit une matrice qui commute avec D, prouver que cette matrice est diagonale.
3. Soit le polynôme $P = X^7 + X + 1$. Trouver toutes les matrices M telle que $P(M) = A$.

Exercice 12
Soit $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner les éléments propres de f.
3. f est-elle inversible ?

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(A^2)$.
2. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer qu'on peut trouver $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle f est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Vérifier que B est inversible et calculer $\mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(B^2)$.
4. Donner le spectre de B et ses sous-espaces propres.