INTEGRALES SUR UN INTERVALLE

Exercice 1
Etudier l'intégrabilité des applications suivantes :

a. $t \mapsto \frac{1}{\ln(t+1+\sqrt{t^2+2t})}$ sur $]0,1]$, b. $t \mapsto \sqrt[4]{t^4+1}-t$, sur $[0,+\infty[$, c. $t \mapsto (1+\ln t)^{-\ln t}$ sur $[1,+\infty[$.

Exercice 2
Montrer que la fonction $t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 3
Existence et calcul de $\int_0^1 -\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$.

Exercice 4
On pose quand on a le droit $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n^x}$.

1. Trouver l'ensemble D de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. S est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 5
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto |\ln t|^n$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\int_0^1 |\ln t|^n dt$.

Exercice 6
Montrer $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\cos(x)}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $[x \to +\infty]$.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{x/2}^x f(t)dt$.
2. On suppose de plus que f est à valeurs réelles positives et décroissante. Montrer que $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ ne soit pas bornée.

Exercice 8*
Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, b. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(t + \frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 9*

1. Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la convergence de $I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u} du$ et en donner sa valeur.

Exercice 10*

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.
3. Linéariser $\sin^3(t)$, puis calculer I.

Exercice 11*
Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^a} dx$.

1. Déterminer la nature de $I(a)$ en fonction de a.
2. Calculer $I(2)$ et $I(3)$.

Exercice 12*
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1[, \mathbb{R})$. On suppose que l'intégrale $\int_0^1 f'^2(t) dt$ converge et que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$.

Exercice 13*
Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(x+t)^{\alpha+1}} dt$. Justifier la définition de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que cette fonction est positive.
2. Soit $R : x \mapsto \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^\alpha} du\right)^2 + \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^\alpha} du\right)^2$.
   Justifier la définition de R sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que cette fonction est décroissante.

Exercice 14**
Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t - x) - f(t)| dt.$$

Faire un dessin.

Exercice 15**
On pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin(\pi n x)^2}{\tan(\pi x)} dx$. Etudier la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{u_n^\alpha}{n^\beta}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.