DETERMINANTS

Exercice 1
Soient a, b et c trois complexes. On pose
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice diagonale D telle que $MJ = JD$.
2. En déduire une factorisation du déterminant de M en trois facteurs.

Exercice 2
Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer, que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$. Montrer que n est pair.
2. Donner un exemple de $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB + BA = 0$.

Exercice 4
Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

2. $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \cdots & (n+2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

3. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & a_1 & \ddots & a_2 \\ & & & a_1 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ dans K,

4. $\begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$,

5. $\begin{vmatrix} a & x & \cdots & \cdots & x \\ y & z & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ y & & & & z \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, a, x, y et z dans K.

Exercice 5

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$ avec $a_{i,j} = (\alpha_i + \beta_j)^n$ pour tout (i,j) dans $[\![0, n]\!]^2$, avec $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Calculer $\det(A)$. (On pourra voir A comme un produit de deux matrices...)

Exercice 6

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

et J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont tous les éléments valent 1.

1. Montrer que la fonction qui à x associe $\det(A + xJ)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Déduire $\det(A)$.

Exercice 7

On note E_n l'ensemble des matrices de taille n dont les coefficients valent tous 0 ou 1. On note φ l'application qui à $A \in E_n$ associe la somme des coefficients de A. On note enfin $F_n = E_n \cap GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi(F_n)$ est une partie majorée de $\mathbb{N}$. Expliciter son minimum et son maximum en fonction de n.

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(M + A) = \det(M)$. Déterminer l'ensemble des matrices A vérifiant cette condition.