ESPACES VECTORIELS NORMES

Exercice 1
Soit E l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0)=0$. On pose pour f dans E :

$$n(f)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)+f'(t)| \qquad \text{et} \qquad N(f)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|+\sup_{t\in[0,1]}|f'(t)|.$$

1. Montrer que n et N sont deux normes sur E.
2. Montrer qu'elles sont équivalentes.

On pourra utiliser les remarques suivantes : pour tout $f\in E$ et pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$ et $\frac{d}{dx}(e^x f(x))=e^x(f'(x)+f(x))$.

Exercice 2
Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies sur $[0,1]$ et lipschitziennes, c'est à dire telles que :

$$\sup_{0\leq x<y\leq 1}\frac{|f(x)-f(y)|}{y-x}=K(f)<+\infty.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N : f\mapsto |f(0)|+K(f)$ est une norme sur E.
3. Pour f dans E, on pose $M(f)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. On sait que M est une norme sur E.
   (a) Montrer que pour tout f dans E, $M(f)\leq N(f)$.
   (b) M et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 3
On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la suite $(Z_n)=((u_n,v_n,w_n))$ de $\mathbb{R}^3$ définie par : $Z_0=(u_0,v_0,w_0)\in\mathbb{R}^3$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n-\frac{1}{6}w_n+\frac{1}{2}\\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n+\frac{1}{6}v_n+\frac{1}{3}w_n\\ w_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}v_n+\frac{1}{6}w_n-\frac{7}{6}.\end{cases}$$

On identifiera un élément de $\mathbb{R}^3$ et sa matrice représentative dans la base canonique. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|(x,y,z)\|_\infty=\mathrm{Max}(|x|,|y|,|z|)$.

1. Montrer que la suite (Z_n) vérifie une relation matricielle de la forme : $Z_{n+1}=AZ_n+B$.
2. Montrer que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, on a $\|AX\|_\infty\leq k\|X\|_\infty$, où k est un réel de $]0,1[$.
3. Montrer que l'équation : $X=AX+B$ admet une unique solution L dans $\mathbb{R}^3$.
4. Déduire de ce qui précède et d'une récurrence, une inégalité concernant $\|Z_n-L\|_\infty$, $\|Z_0-L\|_\infty$, n et k. Conclure quant à la convergence de (Z_n).

Exercice 4
Montrer que N, définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad N(x,y)=\max(|x|,|y|,|x-y|),$$

est une norme et représenter sa boule unité fermée.

Exercice 5*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des coefficients par ligne ou colonne de A vaut 1 et dont les coefficients sont tous dans $]0,1[$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{1\}$ alors $|\lambda| < 1$.
3. On suppose que (A^p) converge. Interpréter géométriquement sa limite.

Exercice 6** **Norme p sur $\mathbb{K}^n$**
Soient n et p deux entiers valant au moins 1. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_p & : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x=(x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}. \end{array}$$

1. Un peu de convexité.
   Soient p et q deux éléments de $]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
   (a) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer
   $$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$
   (b) Soient $x=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y=(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer l'inégalité de Hölder
   $$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$
   On pourra poser $\alpha = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$ et utiliser la question précédente avec $x = \frac{|x_k|}{\alpha}$ et $y = \frac{|y_k|}{\beta}$.
   (c) En déduire l'inégalité de Minkowski :
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$
2. Montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 7** **Norme p sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$**
Soient a et b deux réels vérifiant $a<b$. Soit $p \geq 1$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{N}_p & : & \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}. \end{array}$$

1. Montrer que $\mathcal{N}_p$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
2. Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, montrer que $\mathcal{N}_p(f) \underset{p\to+\infty}{\to} \|f\|_\infty$.
3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si f est seulement supposée continue par morceaux ?