SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

Exercice 1
Etudier les convergences simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^{-nx}$; **b.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$.

Exercice 2
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum\limits_{n\geq 1} n^2 a_n^2$ converge. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ définie par $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n \sin nx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement.

Exercice 3
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. On note S la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Que vaut $S(1)$?
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(1-e^{-x})^n}{n^2}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $[-\ln 2, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-\ln(2), +\infty[$ et calculer f'.

Exercice 5
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-nx}\sin(x)$.

1. Donner le domaine de convergence simple de $\sum g_n$. On note G sa somme.
2. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer G.
4. G est-elle continue en 0 ?

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

1. Déterminer de domaine de convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.
2. On note S la somme de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Donner le domaine de convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$. On note G sa somme.
2. $\sum g_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée d'ordre k de g_n.
6. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Quelle est la limite de G en $+\infty$?
8. Trouver un équivalent de G en $+\infty$.
9. Quelle est la limite de G en 0 ?

Exercice 8

Pour tout $x > 0$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

1. Etudier la définition et la continuité de S sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer $xS(x) - S(x+1)$.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $S(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en précisant les valeurs de a, b, c.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$. Et $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $[a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Etudier la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathcal{D}_f$.
4. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
6. (a) Montrer l'inégalité suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt.$$

   (b) En déduire un encadrement de f.

   (c) Retrouver la limite de la question précédente.
7. Trouver un équivalent de f en 0^+.