SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

Exercice 1
Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites d'applications suivantes :

a. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$; **b.** $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n-1}{x^n+1}$; **c.** $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

Exercice 2
Soient (f_n) une suite de fonctions, définies sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J fermé, convergeant uniformément et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $(\varphi \circ f_n)$ converge-t-elle uniformément? Le résultat change-t-il si on suppose que J est un segment ?

Exercice 3
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$.

1. Etudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Calculer la fonction somme et étudier sa continuité.

Exercice 5
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$.

1. Etudier les convergences simple, normale et uniforme de $\sum f_n$.
2. On note S la fonction somme. Montrer que $S(x) \to +\infty$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 6
On considère la série de fonctions de terme général $x \mapsto u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Qu'en déduisez-vous ?
2. Montrer que la fonction S, somme de cette série, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que S vérifie une équation différentielle simple du second ordre sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.
5. Montrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7
Pour $x \geq 0$ et $n > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^2x+1}$.

1. Montrer que $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la somme f de la série est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8
On définit une fonction g par $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x\ln(n)}{1+xn^2}$.

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Etudier la continuité de g en 0.

Exercice 9

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
4. Trouver un équivalent de f en 0^+.
5. Montrer que f est décroissante et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 10
Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs convergente. On pose $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nx)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\int\limits_0^1 f$.

Exercice 11
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12*
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

1. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (f_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes sur le segment $[a,b]$, qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[c,d] \subset [a,b]$.

Exercice 13* Deuxième théorème de Dini
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ $(a < b)$ et à valeurs réelles, convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$. On suppose que chaque f_n est croissante. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 14*
Soient $a < b$ des réels. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ uniformément convergente sur cet ensemble. Que peut-on dire des suites dont les termes généraux sont

$$u_n = \max_{x\in[a,b]} f_n(x) \quad \text{et} \quad v_n = \min_{x\in[a,b]} f_n(x)?$$

Exercice 15*
Soit la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

3. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 16*
On considère la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2n^2}$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Donner le domaine de définition de f. Etudier sa continuité.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Trouver un équivalent de f en 0.

Exercice 17*
On considère la fonction définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$$

1. Quel est le domaine de f ?

2. f est-elle de classe C^∞ sur son domaine ? Sur $]-1,1[$?

3. Trouver le développement en série entière de f.

Exercice 18 Théorème de Weierstrass par convolution**
Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [-1,1]$, on pose :

$$P_n(x) = (1-x^2)^n, \quad a_n = \int_{-1}^{1} P_n(t)dt, \quad \text{et} \quad Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_n}.$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{2}{n+1}$.
   (b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Démontrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, 1]$.

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)dt.$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la restriction de f_n à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est une fonction polynomiale.
   (b) Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

Exercice 19 Premier théorème de Dini**
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$ qui converge simplement vers f continue. On veut montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a,b] \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

1. Justifier que si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que $K_n(\varepsilon) = \emptyset$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

2. Conclure.