SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

Exercice 1
Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites d'applications suivantes :

a. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$; **b.** $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^n-1}{x^n+1}$; **c.** $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

Exercice 2
Soient (f_n) une suite de fonctions, définies sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J fermé, convergeant uniformément et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $(\varphi \circ f_n)$ converge-t-elle uniformément? Le résultat change-t-il si on suppose que J est un segment ?

Exercice 3 Deuxième théorème de Dini
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ $(a < b)$ et à valeurs réelles, convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. On suppose que chaque (f_n) est croissante. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$.

1. Etudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Calculer la fonction somme et étudier sa continuité.

Exercice 5
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$.

1. Etudier les convergences simple, normale et uniforme de $\sum f_n$.
2. On note S la fonction somme. Montrer que $S(x) \to +\infty$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 6
On considère la série de fonctions de terme général $x \mapsto u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Qu'en déduisez-vous ?
2. Montrer que la fonction S, somme de cette série, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que S vérifie une équation différentielle simple du second ordre sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 7
Pour $x \geq 0$ et $n > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^2x+1}$.

1. Montrer que $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la somme f de la série est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8
On définit une fonction g par $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\ln(n)}{1+xn^2}$.

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Etudier la continuité de g en 0.

Exercice 9

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
4. Trouver un équivalent de f en 0^+.
5. Montrer que f est décroissante et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 10
Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs convergente. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nx)$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\int_0^1 f$.

Exercice 11
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12 Mines-Ponts
Soient $a < b$ des réels. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ uniformément convergente sur cet ensemble. Que peut-on dire des suites dont les termes généraux sont

$$u_n = \max_{x\in[a,b]} f_n(x) \quad \text{et} \quad v_n = \min_{x\in[a,b]} f_n(x).$$

Exercice 13 Mines-Ponts
Soit la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etudier la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 Centrale 2
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2\pi^2}\right)$$

1. Calculer u_n pour $n \in [1, 10]$ avec un nombre de décimales satisfaisant puis $\frac{1}{u_{10^n}}$ pour $n \in [1, 4]$. Que peut-on conjecturer ?
2. (a) Soient f, g définies par

   $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$$

   Quelle est la limite de g en 0 ? Montrer que f et g sont continues sur $[0, \pi[$.

   (b) Tracer les courbes représentatives de f et g sur $]0, \pi[$. Que peut-on conjecturer ? On admettra ce résultat.

   (c) Calculer, pour $x \neq 0$,

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

   Indication : on considérera $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ que l'on calculera de deux façons.

   (d) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 15 Centrale 1
On considère la fonction définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$$

1. Quel est le domaine de f ?
2. f est-elle de classe C^∞ sur son domaine ? Sur $]-1, 1[$?
3. f est-elle intégrable ?
4. Trouver le développement en série entière de f.