REDUCTION

Exercice 1
Soit un entier $n \geq 3$ et un réel a. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M et trouver une base du sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0.
2. Etudier le système $MX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$.
3. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2
Soit E l'espace des suites complexes, f la fonction de E dans E qui à la suite (u_n) associe la suite (v_n) où $v_0 = u_0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$. On admet que f est un endomorphisme de E. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 3
Déterminer les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$\Phi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de Φ. Montrer que $P' \neq 0$ et en déduire le degré de P.
3. Déterminer les éléments propres de Φ.

Exercice 5
Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(= A)$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 6
Soit $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.
Montrer également que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 7
Soit A, carrée d'ordre n, de diagonale nulle et dont tous les autres coefficients valent 1. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 8
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Montrer qu'elle est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont à déterminer.

Exercice 9 Centrale
V désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme diagonalisable. On note

$$\Gamma_f = \{u \in \mathcal{L}(V) /\ u \circ f = f \circ u\}$$

ensemble appelé le commutant de f.

1. Montrer que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ et qu'il est stable par composition.
2. Déterminer la dimension de Γ_f.
3. Soit $E = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) /\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ u({}^tM) = {}^t(u(M))\}$. Est-ce un espace vectoriel ? Quelle est alors sa dimension ?

Exercice 10 Mines-Ponts
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer que : λ est valeur propre si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$$

2. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes.