

REDUCTION

Exercice 1

Déterminer les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$\Phi(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de Φ . Montrer que $P' \neq 0$ et en déduire le degré de P .
3. Déterminer les éléments propres de Φ .

Exercice 3

Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (= A)$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Soit un entier $n \geq 3$ et un réel a . Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de M et trouver une base du sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0.
2. Etudier le système $MX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$.
3. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Montrer qu'elle est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont à déterminer.

Exercice 6

Soit A , carrée d'ordre n , de diagonale nulle et dont tous les autres coefficients valent 1. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 7

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E .
 - (a) Soit λ une valeur propre non nulle de f . Montrer que $E_\lambda(f) \subset \text{Im}(f)$.
 - (b) Le résultat est-il toujours vrai si $\lambda = 0$?
2. Soit $f : P \mapsto P(-4)X + P(6)$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ si $n \geq 1$.
 - (b) Déterminer les éléments propres de f .

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $L_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]; P \mapsto XP'' + (X - 4)P' - 3P$.

1. Montrer que $L_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. L'endomorphisme L_n est-il diagonalisable ?
3. Donner la dimension et une base du noyau de L_n .

Exercice 9

Soit E l'espace des suites complexes, f la fonction de E dans E qui à la suite (u_n) associe la suite (v_n) où $v_0 = u_0$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$. On admet que f est un endomorphisme de E . Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Exercice 10*

Soient E un espace-vectoriel de dimension $n \geq 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E stable par u .

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E) \subset H$.
2. En déduire que $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

Exercice 11*

Soit $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Déterminer les éléments propres de B en fonction de ceux de A .

Montrer également que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 12*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. On note E_X l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont X est un vecteur propre.

1. Montrer que E_X est un espace vectoriel.
2. Déterminer E_X et préciser sa dimension. À l'aide de l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
 $A \mapsto AX$, on pourra déterminer un sous-espace pertinent F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $E_X = \text{Ker}(\varphi) \oplus F$.
3. Donner une base de E_X lorsque $X = (1 \ 2 \ 3)^T$.

Exercice 13**

V désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme diagonalisable. On note

$$\Gamma_f = \{u \in \mathcal{L}(V) / u \circ f = f \circ u\}$$

ensemble appelé le commutant de f .

1. Montrer que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ et qu'il est stable par composition.
2. Déterminer la dimension de Γ_f .
3. Soit $E = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) / \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), u({}^t M) = {}^t(u(M))\}$. Est-ce un espace vectoriel ? Quelle est alors sa dimension ?

Exercice 14**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer que : λ est valeur propre si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$$

2. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes.