COMPLEMENTS D'ALGEBRE

Problème

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

   (a) En discutant sur la dimension de $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$, montrer que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$ ou $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

   (b) Justifier l'existence d'une base adaptée à $\mathrm{Im}(u)$. Dans le cas où $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base ?

   (c) Dans le cas où $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, montrer que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

   (d) Montrer alors l'équivalence :

$$E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Tr}(u) \neq 0.$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad F_A(X) = \mathrm{Tr}(AX).$$

   (a) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) On considère l'application F définie par :

$$F \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ A & \mapsto & F_A \end{array}.$$

   Montrer que F est linéaire.

   (c) Soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A. En déduire que F est injective.

   (d) Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par :

$$\psi_f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & f(X)J \end{array}.$$

   On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad f(X) = \mathrm{Tr}(AX).$$

   (b) Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quelle est l'image de ψ_f ? Quel est le rang de ψ_f ?

   (c) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J.

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, avec $n \geq 2$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $G_i = \text{Vect}(\{e_k \mid k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}\})$ et $H_i = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid G_i \subset \text{Ker } f\}$.

1. Expliquer pourquoi les H_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que la somme des H_i est directe.

Exercice 2
On note $E = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) /\ {}^tX + X = 2\text{Tr(X)}A\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace différente de 1.

a. Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Déterminer la trace d'un élément de E.

c. Déterminer la dimension de E.

Exercice 3
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $f\ :\ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Déterminer le noyau de f.

c. f est-elle surjective ?

d. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

e. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.