REVISIONS ALGEBRE

Exercice 1
On munit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de sa structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit l'élément f_a de E par :

$$f_a \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < a \\ 0 & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n réels rangés dans un ordre strictement croissant. Démontrer que la famille $(f_{a_i})_{1\leq i\leq n}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = \alpha Id_E$ (c'est-à-dire : $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in E$).
(Indication : démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ il existe un scalaire $\lambda(x)$ (et un seul) tel que $f(x) = \lambda(x)x$. On choisit a dans E, $a \neq 0_E$. On pose $\alpha = \lambda(a)$. Démontrer que $\lambda(x) = \lambda(a) = \alpha$ pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ en raisonnant dans deux cas : (a, x) liée, (a, x) libre.)

Exercice 3
a. 1. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant l'expression de A à l'aide de I_3 et de B et la formule du binôme, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (carrée d'ordre p). Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'image et le noyau de f. Vérifier que f est un projecteur.

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de E. A tout polynôme P de E, on associe :

$$\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''.$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Ecrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

3. Φ est-il un automorphisme de E ?

4. On considère ici $n = 3$. Déterminer une base de $\text{Im}(\Phi)$ et une base de $\text{Ker}(\Phi)$ à l'aide de $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\Phi)$.

Exercice 6
Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

1. $p \circ q$ est un projecteur
2. $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q$
3. $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\ p + \mathrm{Ker}\ q$.

Exercice 7
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
On considère les trois vecteurs $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer B, la matrice de u relativement à la base (f_1, f_2, f_3).
3. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Donner une relation entre A et B. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8
Soit E un espace vectoriel (sans hypothèse de dimension). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ ssi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
2. Montrer que l'équivalence précédente est vraie avec une somme directe dans le cas de la dimension finie.
3. Soit f définie sur $\mathbb{C}[X]$ par $f(P) = P'$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(f^2)$ et $\ker(f)$. Que peut-on conclure ?

Exercice 9
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) = 1$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f sont des combinaisons linéaires de (Id_E, f, f^2).

Exercice 10
Soient G, F deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $G = \mathrm{Im}(f)$ et $F = \ker(f)$.

Exercice 11
Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur.

1. On suppose que $p \circ f = f \circ p$. Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.
2. Etudier la réciproque.

Exercice 12
On note E_n l'ensemble des matrices de taille n dont les coefficients valent tous 0 ou 1. On note φ l'application qui à $A \in E_n$ associe la somme des coefficients de A. On note enfin $F_n = E_n \cap GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi(F_n)$ est une partie majorée de $\mathbb{N}$. Expliciter son minimum et son maximum en fonction de n.

Exercice 13
Soit E l'ensemble des suites complexes qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+2} + \frac{3}{2}u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Soit $F = \{(u_n) \in E \mid \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.