DENOMBRABILITE

Exercice 1
Soit E un ensemble fini de cardinal supérieur ou égal à 2. Montrer que $E^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2*
On dit qu'un nombre réel est algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients rationnels. On dit qu'il est transcendant dans le cas contraire.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.
2. En déduire que l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable et qu'il existe des nombres transcendants.

Exercice 3*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$, une application croissante.

1. Montrer qu'à chaque point de discontinuité x_0 de f on peut associer un rationnel r_0 de $]\lim\limits_{x_0^-} f, \lim\limits_{x_0^+} f[$ et que l'application $\varphi : x_0 \mapsto r_0$ ainsi construite est injective.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 4**

1. Montrer qu'un ensemble est infini si et seulement s'il contient une partie dénombrable.
2. Montrer que si A est un ensemble au plus dénombrable et B un ensemble infini, alors $A \cup B$ est en bijection avec B.

Exercice 5**
Soit E un espace vectoriel muni d'une base dénombrable $\mathcal{B} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que toute base de E est dénombrable.