REVISIONS ALGEBRE

CCINP 60-64-71-63.

Exercice 1

Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a), f^2(a))$ soit une base de E.

2. Montrer que pour tout endomorphisme g de E,
   g commute avec f si et seulement si $g \in \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2)$.

Exercice 2

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E, F)$. Montrer :

$$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) & = & \{0\} \\ \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) & = & E. \end{cases}$$

Exercice 3

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Démontrer que $A \in GL_3(K)$ et déterminer A^{-1}.
c. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer ker u, ker($u-$Id) et ker($u+$Id).

2. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D représentant u soit diagonale.

3. Exprimer A en fonction de D.

4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $(E_{(i,j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique du K-ev $\mathcal{M}_n(K)$.

a. 1. Soient $p, q, k, l \in [\![1, n]\!]_{\mathbb{N}}$. Déterminer le produit $E_{(p,q)} \times E_{(k,l)}$.
   2. L'anneau $\mathcal{M}_n(K)$ est-il un anneau commutatif ?

b. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(K)$.
   1. Soient $k, l \in [\![1, n]\!]_{\mathbb{N}}$. Déterminer les matrices $A \times E_{(k,l)}$ et $E_{(k,l)} \times A$ et leur décomposition dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.
   2. En déduire que si $A \times E_{(k,l)} = E_{(k,l)} \times A$ pour tout couple (k, l) d'entiers naturels tels que $1 \leq k, l \leq n$ et $k \neq l$, il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I_n = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$.

c. Déduire de ce qui précède que si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ il y a équivalence entre les énoncés :
   (i) $AB = BA$ pour tout $B \in \mathcal{M}_n(K)$.
   (ii) Il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I_n$.

Exercice 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $E = \text{Ker} f \oplus \text{Ker}(f^2 + Id)$.
2. Montrer que dim Ker$(f^2 + Id) \geq 1$ et que si $x \in \text{Ker}(f^2 + Id) \setminus \{0\}$, $(x, f(x))$ est une famille libre de Ker$(f^2 + Id)$.
3. Que vaut det$(-Id)$?
4. En déduire que dim Ker$(f^2 + Id) = 2$.
5. Trouver une base dans laquelle $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est matrice de f.
6. Trouver les $g \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec f et les $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = f$.

Exercice 7
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Prouver que

$$F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'.$$

Exercice 8
On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1 = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \,|\, \text{Tr}(A) = 0\}$, $E_2 = \text{Vect}(I_n)$ et $E_3 = A_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3.$$

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $(E_{i,j})$.

1. Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe deux entiers distincts, i et j de $\{1, \ldots, n\}$ avec $\psi(E_{i,j}) \neq 0$. Montrer que
$$\exists \alpha \in \mathbb{K}, \qquad \psi(I_n + \alpha E_{i,j}) = 0.$$
2. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 10
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de projecteurs de E. On note $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$.

1. Montrer que, si f est aussi un projecteur, alors : $\text{Im} f = \text{Im} f_1 \oplus \cdots \oplus \text{Im} f_n$.
(On rappelle que pour un projecteur, sa trace et son rang sont égaux.)
2. Montrer que f est un projecteur si et seulement si, pour tout couple d'entiers distincts (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$, on a :
$$f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Exercice 11
Soient α un réel non nul et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation suivante, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\alpha X + \mathrm{Tr}(X)A = B.$$

Exercice 12
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2. Soit φ une forme linéaire de E non nulle et soit a un vecteur non nul de E. On définit u tel que
$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)a$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $E_1 = \ker(u - Id)$. En donner la dimension.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, tel que si on pose $E_2 = \ker(u - \lambda Id)$, alors $E = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 13
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $u_n = \mathrm{Tr}(A^n)$.

1. Exprimer A^3 en fonction de A et I_3.
2. En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2,\ u_n \in \mathbb{N}^*$.
4. Etudier $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 14
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a, b \in K$. On pose :
$$\Delta_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \qquad \text{(carré d'ordre } n\text{).}$$

Calculer $\Delta_n(a,b)$. (On pourra commencer par ajouter les lignes $2, \dots, n$ à la ligne 1.)

Exercice 15
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Calculer le déterminant :
$$\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 16
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a, b \in K$. On pose :

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b & a & a & \dots & a & a \\ b & b & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & a \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \qquad \text{(carré d'ordre } n\text{).}$$

Calculer $D_n(a,b)$.

Exercice 17
Calculer, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ et si $a_1, \dots, a_n, x \in K$, les déterminants :

a. $$D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix};$$

b. $$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x+a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x+a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 18
Calculer les déterminants suivants, que l'on notera $\Delta_n = \det(A)$ si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec :

1. $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $b_0 = 0$, $a_{i,i} = 1 - b_{i-1}$, $a_{i,i+1} = b_i$, $a_{i,i-1} = -1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon,
2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a_{i,i} = 2\cos\theta$, $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Exercice 19
Démontrer que si n est un entier naturel impair, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si A est antisymétrique, alors $\det(A) = 0$.

Exercice 20
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(K)$. Alors $AB \in \mathcal{M}_p(K)$ et $BA \in \mathcal{M}_q(K)$.
Démontrer que si $p \neq q$, $\det(AB) = 0$ ou $\det(BA) = 0$.

Exercice 21
Si $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que

$$\begin{vmatrix} A & -tB \\ B & A \end{vmatrix} \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 22
Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} \cos(a) & \cos(a+k) & \cos(a+2k) \\ \cos(b) & \cos(b+k) & \cos(b+2k) \\ \cos(c) & \cos(c+k) & \cos(c+2k) \end{vmatrix}$.

Exercice 23 Mines-Ponts
Soit E un espace vectoriel. On considère deux projecteurs p et q. Montrer que $\ker(p) = \ker(q)$ équivaut à $\forall x \in E,\ p(x) = p(q(x))$ et $q(x) = q(p(x))$.